Les différentes fonctions étudiées dans ce problème sont utilisées en traitement d'images pour obtenir une image de bonne qualité u *à partir d'une image bruitée* f. *La régularisation quadratique présente l'avantage d'être très simple et très rapide, mais aussi le défaut de détruire les bords de l'image en donnant une impression de flou. La régularisation à croissance linéaire permet d'obtenir de bien meilleurs résultats de restauration. Malheureusement, elle implique aussi de savoir minimiser efficacement des fonctions non différentiables, ce qui augmente considérablement la difficulté du problème.*

Fin de l'épreuve.

90.03M

SESSION 2009

Filière MP (groupes MP/MPI et groupe I)

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

MATHÉMATIQUES MPI 2

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices est interdit.

Notations

- Soit $N \geq 2$. On considère $X = \mathbb{R}^N$ muni du produit scalaire euclidien usuel :
$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i$$
On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.
Si $u \in X$, on note u_i, $1 \leq i \leq N$, les composantes de u.
On note u^n le terme général d'une suite d'éléments de X.
On note $e = (1, \ldots, 1)$ l'élément de X tel que $e_i = 1$ pour tout i.
- Dans tout le problème, on considère A une matrice de $M_N(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices carrées de taille N^2 à coefficients réels), de coefficients $A_{i,j}$.
On note A^* la matrice transposée de A.
On suppose que A n'est pas la matrice nulle, et vérifie la propriété suivante : $e \in \operatorname{Ker} A$.
- On rappelle qu'on dit qu'une fonction $F : X \to \mathbb{R}$ est convexe sur X si et seulement si pour tout $u \in X$, $v \in X$, et $t \in [0, 1]$, on a
$$F(tu + (1-t)v) \leq tF(u) + (1-t)F(v)$$
On dit qu'une fonction $F : X \to \mathbb{R}$ est strictement convexe sur X si et seulement si pour tout $u \in X$, $v \in X$, $u \neq v$, et $t \in]0, 1[$, on a
$$F(tu + (1-t)v) < tF(u) + (1-t)F(v)$$
- Si F est différentiable en $u \in X$, on rappelle que le gradient de F en u est donné par :
$$\nabla F(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(u) \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_N}(u) \end{pmatrix}$$
- Si F est C^2, on note $\nabla^2 F(u)$ la matrice hessienne de F. Il s'agit d'une matrice de $M_N(\mathbb{R})$, dont le coefficient en position i, j est donné par :
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(u)$$
On admettra alors que F est strictement convexe si :
$$\langle \nabla^2 F(u)(v-u), v-u \rangle > 0$$
pour tout $u \in X$, $v \in X$, $u \neq v$.

5 Régularisation non différentiable

Si $u \in X$, on définit :
$$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |u_i|$$
et
$$\|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |u_i|$$
On considère l'application $H : X \to \mathbb{R}$ définie par :
$$H(u) = \frac{1}{2}\|f - u\|^2 + \|Au\|_1$$
Dans cette dernière partie, on suppose de plus que la matrice A est symétrique.

On s'intéresse au problème :
$$\text{Trouver } u \text{ dans } X \text{ tel que } \; H(u) = \min_{v \in X} H(v). \tag{4}$$
On considère l'ensemble K défini par :
$$K = \{Av \text{ tel que } \|v\|_\infty \leq 1\}$$
On admet qu'il existe un unique élément $w \in K$ tel que $\|f - w\| = d(f, K)$, où $d(f, K)$ désigne la distance euclidienne de f à K.

On admet aussi que si $z \in K$, alors $\langle f - w, z - w \rangle \leq 0$.

1. On considère l'application $L : X \to \mathbb{R}$ définie par :
$$L(u, v) = \frac{1}{2}\|f - u\|^2 + \langle v, Au \rangle$$
   (a) Soit u un élément de X. Exprimer $\sup_{\|v\|_\infty \leq 1} L(u, v)$ en fonction de H.

   (b) Montrer que :
$$L(u, v) = \frac{1}{2}\|f - u - Av\|^2 - \frac{1}{2}\|f - Av\|^2 + \frac{1}{2}\|f\|^2$$
   (c) Dans cette question, on admet que l'on a l'égalité :
$$\sup_{\|v\|_\infty \leq 1} \inf_{u \in X} L(u, v) = \inf_{u \in X} \sup_{\|v\|_\infty \leq 1} L(u, v) \tag{5}$$
   Montrer que u est solution du problème (4) si et seulement si $u = f - w$.
2. Démontrer l'égalité (5).

avec $(A_\epsilon(u))_i = \sqrt{\epsilon^2 + (Au)_i^2}$. On définit :

$$\mathcal{G}(v,u) = G(u) + \langle v-u, \nabla G(u)\rangle + \frac{1}{2}\langle v-u, \mathcal{A}(u)(v-u)\rangle$$

avec $\mathcal{A}(u)$ élément de $M_N(\mathbb{R})$ donné par (on note I_N la matrice identité de $M_N(\mathbb{R})$) :

$$\mathcal{A}(u) = I_N + A^*C(u)$$

où $C(u) \in M_N(\mathbb{R})$ et si $1 \leq i,j \leq N$:

$$(C(u))_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{(A_\epsilon(u))_i}$$

On rappelle qu'on note u^n le terme général d'une suite d'éléments de X.

1. Montrer que pour tout u et v dans X, on a :

$$\langle Av, C(u)v\rangle \geq 0$$

2. Soit $u^0 \in X$. Montrer que la relation de récurrence suivante définit une suite (u^n) unique :

$$\mathcal{G}(u^{n+1}, u^n) = \min_v \mathcal{G}(v, u^n)$$

En déduire que la suite (u^n) ainsi définie vérifie :

$$0 = u^{n+1} - f + A^*C(u^n)u^{n+1}$$

3. Soit u et v deux éléments de X. Si $1 \leq i \leq N$, on pose $a_i = \sqrt{(A_\epsilon(u))_i}$ et $b_i = \sqrt{(A_\epsilon(v))_i}$.
   (a) Montrer que :

$$a_i - b_i + \frac{1}{2}\frac{b_i^2 - a_i^2}{a_i} \geq 0$$

   (b) Déduire de la question précedente que :

$$G(v) \leq \mathcal{G}(v,u)$$

4. Montrer que la suite $(u^{n+1} - u^n)$ converge.
5. Montrer que la suite (u^n) converge vers la solution du problème (3) notée u.

1 Convexité

On pourra admettre les résultats de cette première partie pour traiter les questions des parties suivantes.

1. Soit $F : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $F(u) \to +\infty$ si $\|u\| \to +\infty$.
   (a) Montrer qu'il existe au moins un élément u dans X tel que $F(u) = \min_{v\in X} F(v)$.
   (b) L'élément précédent u est-il en général unique ? Si F est supposée de plus strictement convexe sur X, a-t-on unicité pour u ?
2. Soit F une fonction différentiable sur X.
   (a) Montrer que si F est convexe, alors :

$$F(v) \geq F(u) + \langle \nabla F(u), v-u\rangle \tag{1}$$

   pour tout (u,v) dans X^2.
   (b) Réciproquement, montrer que si pour tout (u,v) dans X^2 l'inégalité (1) est vérifiée, alors F est convexe.
   Indication : on pourra introduire le point $w = u + t(v-u)$ pour $t \in [0,1]$, et appliquer l'inégalité aux couples (w,u) et (w,v).
3. Soit F une fonction différentiable sur X. Montrer que F est strictement convexe si et seulement si : $F(v) > F(u) + \langle \nabla F(u), v-u\rangle$ pour tout (u,v) dans X^2 avec $u \neq v$.
4. On suppose F différentiable sur X. On rappelle qu'une condition nécessaire pour que u puisse être un point de minimum de F est que $\nabla F(u) = 0$.
   (a) La condition nécessaire $\nabla F(u) = 0$ est-elle en général suffisante pour que u soit un point de minimum de F ?
   (b) Si on suppose de plus F convexe sur X, la condition nécessaire $\nabla F(u) = 0$ est-elle suffisante ?
5. Soit F une fonction différentiable sur X.
   (a) Montrer que si F est convexe, alors pour tout (u,v) dans X^2 on a :

$$\langle \nabla F(u) - \nabla F(v), u-v\rangle \geq 0 \tag{2}$$

   (b) Réciproquement, montrer que si pour tout (u,v) dans X^2 l'inégalité (2) est vérifiée, alors F est convexe.
   Indication : on pourra étudier les variations de la fonction

$$\phi(t) = (1-t)F(u) + tF(v) - F((1-t)u + tv)$$

6. Soit F une fonction C^2 sur X. Montrer que F est convexe si et seulement si pour tout (u,v) dans X^2 :
$$\langle \nabla^2 F(u)v, v\rangle \geq 0$$

2 Régularisation quadratique

Soit $\lambda \geq 0$, et $f \in X$. On considère l'application $F_\lambda : X \to \mathbb{R}$ définie par :
$$F_\lambda(u) = \|f-u\|^2 + \lambda \|Au\|^2$$

1. Montrer que F_λ est C^2 sur X. Calculer $\nabla F_\lambda(u)$, puis $\nabla^2 F_\lambda(u)$.
2. Montrer que F_λ est convexe sur X. F_λ est-elle strictement convexe ?
3. Montrer qu'il existe exactement un élément u_λ dans X tel que $F_\lambda(u_\lambda) = \min_{v\in X} F_\lambda(v)$. Montrer que u_λ est caractérisé par la relation :
$$u_\lambda - f + \lambda A^* A u_\lambda = 0$$
4. (a) Que dire de la solution u_λ lorsque $\lambda \to 0$?
   (b) Que dire de Au_λ lorsque $\lambda \to +\infty$?
5. Pour $i \in \{1,2\}$, on note pour f_1 et f_2 dans X :
$$F_\lambda^i(u) = \|f_i - u\|^2 + \lambda\|Au\|^2$$
On note u_λ^i un point où F_λ^i atteint son minimum sur X.
Donner une majoration de $\|u_\lambda^1 - u_\lambda^2\|$ dépendant de $\|f_1 - f_2\|$.

3 Régularisation à croissance linéaire

Soit $\epsilon > 0$, et $f \in X$. On rappelle qu'on note $e = (1, \dots, 1)$ l'élément de X tel que $e_i = 1$ pour tout i. On considère l'application $G : X \to \mathbb{R}$ définie par :
$$G(u) = \frac{1}{2}\|f-u\|^2 + \langle e, A_\epsilon(u)\rangle$$
avec $A_\epsilon(u) \in X$ et si $1 \leq i \leq N$:
$$(A_\epsilon(u))_i = \sqrt{\epsilon^2 + (Au)_i^2}$$

On rappelle qu'on note u^n le terme général d'une suite d'éléments de X. On considère le problème :
$$\text{Trouver } u \text{ dans } X \text{ tel que } \; G(u) = \min_{v\in X} G(v) \tag{3}$$

1. Montrer que G est différentiable. Calculer $\nabla G(u)$.
2. Montrer que le problème (3) admet une unique solution u dans X, et que cette solution u est caractérisée par la relation :
$$u - f + A^* B(u) = 0$$
avec $B(u) \in X$ et si $1 \leq i \leq N$:
$$(B(u))_i = \frac{(Au)_i}{(A_\epsilon(u))_i}$$
3. Soit $\tau \geq 0$.
Supposons un élément u^n fixé dans X . On considère l'application $G_n : X \to \mathbb{R}$ définie par :
$$G_n(u) = \frac{\tau}{2}\|u-f\|^2 + \tau\langle e, A_\epsilon(u)\rangle + \frac{1}{2}\|u-u^n\|^2$$
Montrer qu'il existe un unique élément u^{n+1} dans X tel que $G_n(u^{n+1}) = \min_{u\in X} G_n(u)$, et que l'on a la relation suivante :
$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} = -u^{n+1} + f - A^* B(u^{n+1})$$
4. On fixe u^0 dans X, et on considère la suite (u^n) définie par récurrence par la relation $G_n(u^{n+1}) = \min_{u\in X} G_n(u)$.
Montrer que la série $\sum \|u^n - u^{n+1}\|^2$ est convergente.
5. Montrer que la suite (u^n) est bornée.
6. En déduire que la suite (u^n) converge vers u unique solution du problème (3).
7. Dans le cas $\epsilon = 0$, G est-elle différentiable sur X ?

4 Méthode de type quasi-Newton

Soit $\epsilon > 0$ et $f \in X$. On rappelle que :
$$G(u) = \frac{1}{2}\|f-u\|^2 + \langle e, A_\epsilon(u)\rangle$$