UL245

SESSION 2003

Filière : 2ème concours – Concours F/S (Paris)

MATHEMATIQUES

(Epreuve commune aux ENS Ulm et Lyon)

Durée : 3 heures

Les calculatrices sont interdites.

Le problème I est indépendant des deux suivants.

I

On note $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Soit $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ l'anneau des endomorphismes de $\mathcal{P}$. Soit $\mathrm{Id} \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ l'application identique, c'est-à-dire telle que $\mathrm{Id}(P) = P$ pour tout $P \in \mathcal{P}$. Soit $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ l'application dérivation : $D(P) = P'$. Si $a \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$, on note $a^0 = \mathrm{Id}$, $a^1 = a$, … , $a^i = a \circ (a^{i-1})$. Si $a \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ est inversible, on note a^{-1} son inverse, défini par $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = \mathrm{Id}$, et on note $a^{-i} = (a^{-1})^i$.

(a) Soit λ un réel. Montrer que $D + \lambda.\mathrm{Id}$ est un élément inversible de $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ si et seulement si $\lambda \neq 0$.

(b) Soient les applications polynomiales $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, …, $P_i(x) = \frac{x^i}{i!}$, etc...

Soit $Q_i = (D + 2.\mathrm{Id})^{-i}(P_i)$. Montrer que, si $i \in \mathbb{N}^*$, alors $Q_i'' + 2Q_i' = Q_{i-1}$.

2. Soit $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale non identiquement nulle, et *symétrique*, c'est-à-dire telle que $S(x,y) = S(y,x)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que S s'écrit de façon unique

$$S(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-y)^{2i}}{(2i)!} R_i(x+y),$$

où les R_i sont des éléments de $\mathcal{P}$ et $R_n \neq 0$ (on utilisera le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$).

Tournez la page S.V.P.

(b) On définit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = e^{x+y} S(x.y)$. Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f$$

si et seulement si (avec les notations ci-dessus)

(I) $\quad R_n$ est une constante $\neq 0$, et $\forall i = 0, 1, \ldots, n-1$. $R_i'' + 2R_i' = R_{i+1}$.

Quel est le degré de chaque R_i ? Quel est le degré total de S ?

3. Montrer que les suites $(R_i)_{0 \leq i \leq n}$ solutions de (I) sont celles qui s'expriment de la façon suivante

$$\begin{pmatrix} R_n \\ R_{n-1} \\ \vdots \\ R_0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}$$

où T est une matrice triangulaire de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \lambda_n & \ldots & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_0 \neq 0,$$

et les Q_i sont définis à la question 1.(b).

II

Si S est une série à termes complexes a_n $(n \in \mathbb{N})$, on note

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

la n-ième somme partielle, et

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k$$

la moyenne des $n+1$ premières sommes partielles.

On note C l'ensemble des séries S telles que la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$. On note C' l'ensemble des séries à termes complexes convergeant dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$.

2. (a) Soit S_1 la série de terme général $a_n = (-1)^n$. A-t-on $S_1 \in \mathcal{C}'$? A-t-on $S_1 \in \mathcal{C}$?

(b) Soit S_2 la série de terme général $a_n = (-1)^n n$. A-t-on $S_2 \in \mathcal{C}'$? Calculer σ_n (on distinguera suivant que n est pair ou impair). A-t-on $S_2 \in \mathcal{C}$?

3. Soit $S \in \mathcal{C}$.

(a) Démontrer, pour tout $x \in]-1, 1[$, la convergence de la série entière $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\sigma_n x^n$. puis de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n$.

(b) Déduire de ce qui précède que la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.

(c) Montrer que $f(x) = (1-x)^2 g(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

(d) Montrer que $f(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1 dans $]-1, 1[$.

III

Rappel : dans les séries entières, x^0 vaut conventionnellement 1 pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On fixe un réel $A > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que $|a_n| \leq \frac{A}{n}$ pour tout $n \geq 1$. La série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge pour $x \in]-1, 1[$ (on ne demande pas de le redémontrer) et on suppose que $f(x)$ admet une limite ℓ lorsque x tend vers 1 dans $]-1, 1[$.

1. (a) Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $P(0) = 0$. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P(x^n)$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$. Calculer la limite de cette somme lorsque x tend vers 1 dans $]-1, 1[$, en fonction de ℓ et $P(1)$.

(b) Que se passerait-il si, à la question précédente on avait $P(0) \neq 0$ (on donnera une preuve ou un contre-exemple) ?

(c) Soit $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n Q(x^n)$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$. Calculer, lorsque x tend vers 1 dans $]-1, 1[$, la limite de $(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n Q(x^n)$ en fonction d'une intégrale portant sur Q.

2. On admet que, pour toute fonction continue $\phi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P_\varepsilon \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in [0, 1]$, $|\phi(x) - P_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$.

Soit $\psi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, continue sur $[0, \frac{1}{2}[$ et $[\frac{1}{2}, 1]$, et admettant une limite à gauche en $\frac{1}{2}$. Montrer que si $\varepsilon > 0$, il existe deux polynômes Q_1, $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que,

$Q_1(x) \leq \psi(x) \leq Q_2(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$, et $\int_0^1 (Q_2(x) - Q_1(x))dx \leq \varepsilon$.

Tournez la page S.V.P.

3. Soit χ la fonction égale à 0 sur $[0, \frac{1}{2}[$ et à 1 sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

(a) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \chi(x^n)$ converge pour tout $x \in [0, 1[$.

(b) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe deux polynômes $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P_1(0) = P_2(0) = P_1(1) - P_2(1) = 0$ et vérifiant

$P_1(x) \leq \chi(x) \leq P_2(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$, et $\int_0^1 \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)} dx \leq \varepsilon$.

(c) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$ assez proche de 1, les différences

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \chi(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_2(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \chi(x^n)$$

sont majorées par $(A + 1)\varepsilon$.

4. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.