UL245

SESSION 2004

Filière : $2^{\text{ème}}$ concours – Concours F/S (Paris)

# MATHEMATIQUES

(Epreuve commune aux ENS Ulm et Lyon)

Durée : 3 heures

*Les calculatrices sont interdites.*

**Tournez la page S.V.P.**

**Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction dans l'évaluation de la copie. L'usage des calculatrices est interdit.**

NOTATIONS : pour toute l'épreuve, on notera
- Si $E$ est un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E$.
- Si $A \in \mathcal{P}(E)$ et $x \in E$, alors la fonction $\mathbf{1}_A$ est définie sur $E$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A(x) &= 1 \text{ si } x \in A, \\ &= 0 \text{ sinon,} \end{aligned}$$

- Pour deux réels quelconques $a < b$ on notera

$$[a+0, b-0] = ]a,b[, \ [a+0,b] = ]a,b], \ [a, b-0] = [a,b[.$$

# Problème : densité de parking

Ce problème est constitué de trois parties différentes, on pourra admettre les résultats de l'une dans la résolution de l'autre.

Le but de ce problème est de donner une formule explicite pour la densité de parking dans une rue de longueur infinie où des voitures de taille identiques se garent au hasard, l'explication et la mise en équations de ce modèle font l'objet de la troisième partie du problème, les deux premières servent à mettre en place les outils pour le résoudre.

## Partie I : Théorème taubérien

Le but de cet exercice est de démontrer et expliquer le résultat suivant :

**Théorème 1** *Soit $\alpha$ une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, telle que $\alpha(0) = 0$, posons*

$$I(y) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-yt}\, d\alpha(t),$$

*si*
- *$I(y)$ est convergente pour tout $y > 0$,*
- *il existe une constante $C > 0$ telle que $\lim_{y\to 0, y>0} yI(y) = C$,*

*alors*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\alpha(t)}{t} = C.$$

**Dans toute cette partie, nous supposerons que $\alpha$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\alpha(0) = 0$.**

Les premières questions servent à définir précisément les termes du théorème, en particulier la définition des « intégrales »$\int_{[a,b]}$ ou $\int_{\mathbb{R}_+}$ : lorsque l'on considèrera des intégrales usuelles, elles seront notées $\int_a^b$ ou $\int_0^{+\infty}$.

1. On notera $D$ l'ensemble des points de discontinuité de $\alpha$ : montrer que pour tout $\tau \in D$ on a
$$\lim_{t\to\tau, t<\tau} \alpha(t) \leq \alpha(\tau) \leq \lim_{t\to\tau, t>\tau} \alpha(t),$$
avec au moins l'une de ces deux inégalités stricte.
Nous noterons désormais $\alpha(\tau-0)$ et $\alpha(\tau+0)$ ces deux limites.
Montrer que pour tout entier strictement positif $n$, le sous-ensemble $D_n$ des points $\tau$ de $D$ tels que $\alpha(\tau+0)-\alpha(\tau-0) > 1/n$ est au plus dénombrable. En déduire que $\alpha$ possède au plus un nombre dénombrable de points de discontinuité.

2. On se donne désormais un segment $[a,b]$, avec $0 \leq a < b < +\infty$. Soit $g$ une fonction positive continue sur $[a,b]$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux fonctions $f$ et $h$ constantes par morceaux, c'est-à-dire
$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^n f_i \mathbf{1}_{[a_{i-1},a_i[} + f_n \mathbf{1}_{\{b\}}, \\ h &= \sum_{i=1}^n h_i \mathbf{1}_{[a_{i-1},a_i[} + h_n \mathbf{1}_{\{b\}}, \end{aligned}$$
où $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ et $(f_1,\ldots,f_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(h_1,\ldots,h_n) \in \mathbb{R}^n$, fonctions telles que
$$\forall t \in [a,b],\ f(t) \leq g(t) \leq h(t), \text{ et } h(t) - f(t) < \varepsilon.$$

3. Soit $\beta$ une fonction continue croissante sur $[a,b]$, $f$, $g$ et $h$ définies par la question précédente, si l'on pose
$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f(t)\,d\beta(t) &= \sum_{i=1}^n f_i(\beta(a_i) - \beta(a_{i-1})), \\ \int_{[a,b]} h(t)\,d\beta(t) &= \sum_{i=1}^n h_i(\beta(a_i) - \beta(a_{i-1})), \end{aligned}$$
montrer que
$$\left| \int_{[a,b]} h(t)\,d\beta(t) - \int_{[a,b]} f(t)\,d\beta(t) \right| \leq \varepsilon(\beta(b) - \beta(a)).$$

4. En déduire que l'on peut définir
$$\int_{[a,b]} g(t)\,d\beta(t).$$

5. Considérons maintenant la fonction $\alpha$ restreinte à $[a,b]$, et notons $D = \{\tau_k,\ 1 \leq k \leq N\}$ l'ensemble des points de discontinuité de $\alpha$ sur $[a,b]$, ($N \leq \infty$ car cet ensemble est dénombrable), et notons $A_k = \alpha(\tau_k+0) - \alpha(\tau_k)$ et $B_k = \alpha(\tau_k) - \alpha(\tau_k - 0)$. Montrer que la fonction $\beta$ définie par
$$\forall t \in [a,b],\ \beta(t) = \alpha(t) - \sum_{k=1}^N \left( \mathbf{1}_{\{a\}}(\tau_k) A_k + \mathbf{1}_{]a,t[}(\tau_k)(A_k + B_k) + \mathbf{1}_{\{t\}}(\tau_k) B_k \right)$$

est continue et croissante.
Cela nous permet de définir pour $g$ une fonction continue positive sur $[a, b]$

$$\int_{[a,b]} g(t)\, d\alpha(t) = \int_{[a,b]} g(t)\, d\beta(t) + \sum_{k=1}^{N} g(\tau_k)(A_k \mathbf{1}_{]a,+b]}(\tau_k) + B_k \mathbf{1}_{[a,b[}(\tau_k)).$$

6. Regardons maintenant $\alpha$ sur $\mathbb{R}_+$, montrer que l'on peut définir de même l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}_+} g(t)\, d\alpha(t)$$

pour toute fonction $g$ continue positive à support compact.
On dira que

$$I(y) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-yt}\, d\alpha(t)$$

existe si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,n]} e^{-yt}\, d\alpha(t) \text{ existe et est strictement inférieure à } +\infty.$$

7. Plaçons nous maintenant dans les hypothèses du théorème 1. Considérons la fonction $g$ définie par :

$$g(x) = \frac{1}{x} \text{ si } x \in [e^{-1}, 1],\ g(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux polynômes $P_1$ et $P_2$ tels que

$$P_1(x) \leq g(x) \leq P_2(x),\ \forall x \in [0,1],$$
$$\int_0^1 (P_2(x) - P_1(x))\, dx < \varepsilon.$$

8. Montrer que pour tout polynôme $P$,

$$\lim_{y\to 0, y>0} y \int_{\mathbb{R}_+} e^{-yt} P(e^{-yt})\, d\alpha(t) = C \int_0^{+\infty} e^{-t} P(e^{-t})\, dt,$$

où la constante $C$ est égale à

$$\lim_{y\to 0, y>0} y \int_{\mathbb{R}_+} e^{-yt}\, d\alpha(t).$$

(On commencera par le montrer pour des monômes $P(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$.)

9. En déduire que

$$\lim_{y\to 0, y>0} y \int_{\mathbb{R}_+} e^{-yt} g(e^{-yt})\, d\alpha(t) = C \int_0^{+\infty} e^{-t} g(e^{-t})\, dt.$$

10. En calculant la valeur exacte de ce dernier terme, en déduire le théorème 1.

## Partie II : Résolution d'une équation différentielle avec retard

On suppose qu'il existe une fonction $M$ définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\begin{aligned} M(x) &= 0 \text{ pour tout } x \text{ dans } [0,1], & (1) \\ M(x+1) &= 1 + \frac{2}{x}\int_0^x M(t)\,dt \text{ pour tout } x > 0. & (2) \end{aligned}$$

Le but de cette partie est d'obtenir le résultat suivant :

**Théorème 2** *Lorsque $x$ tend vers $+\infty$, $M(x)/x$ tend vers la constante*

$$C_P = \int_0^{+\infty} \exp\left(-2\int_0^z \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right)dz.$$

1. Déterminer la fonction $M$ sur $[0,4]$, en donner une représentation graphique.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a l'encadrement $(x/2) \leq M(x) \leq x$, en déduire que $M$ est croissante.
3. Montrer que $M$ est continue en tout point de $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, et qu'elle est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+ \setminus \{1,2\}$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0,1\}$ on a
$$xM'(x+1) + M(x+1) = 2M(x) + 1. \tag{3}$$
On appellera ce type d'équation une *équation différentielle avec retard.*
5. Montrer que pour tout $y > 0$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} M(x)e^{-yx}\,dx$ converge, on notera $\phi(y)$ sa valeur.
6. En multipliant (3) par $e^{-yx}$ et en intégrant sur $\mathbb{R}_+$, montrer que $\phi$ est solution de l'équation différentielle :
$$\frac{d}{dy}\left(ye^y\phi(y)\right) = \phi(y)(e^y - 2) - \frac{1}{y}, \tag{4}$$
avec une condition à l'infini :
$$\lim_{y\to+\infty} \phi(y) = 0. \tag{5}$$
7. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par la fonction $w(y) = e^y\phi(y)$. Montrer que $\lim_{y\to+\infty} w(y) = 0$.
8. En déduire la fonction $w$. Montrer que $\phi$ est alors donnée par :
$$\phi(y) = \frac{e^{-y}}{y^2}\int_y^{+\infty} \exp\left(-2\int_y^z \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right)dz, \ \forall y > 0.$$
9. En déduire que
$$\lim_{y\to 0, y>0} y^2\phi(y) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-2\int_0^z \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right)dz.$$
On reconnaît dans cette limite la constante $C_P$.

10. Posons $\alpha(x) = M(x)$. Montrer que $\alpha$ satisfait les conditions du théorème 1. Exprimer

$$\int_0^{\mathbb{R}_+} e^{-yt} d\alpha(t)$$

en fonction de $\phi(y)$.

11. Utiliser le théorème 1 pour en déduire que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{M(x)}{x} = C_P.$$

Ceci conclut la preuve du théorème 2.

## Partie III : Densité de parking

On suppose que des voitures de longueur 1 se garent au hasard le long d'un trottoir de longueur $x \geq 0$. Aucun accident ne peut avoir lieu (pas de recouvrement des voitures). Montrer que le nombre moyen $M(x)$ de voitures pouvant se garer dans cette rue est solution du système $(1, 2)$.
Déduire des questions précédentes que $C_P$ est la densité moyenne de voitures par unité de longueur de trottoir pour une rue de longueur infinie.