UL245

SESSION 2005

Filière : $2^{\text{ème}}$ concours

MATHEMATIQUES

(Epreuve commune aux ENS Ulm et Lyon)

Durée : 3 heures

Les calculatrices sont interdites.

Tournez la page S.V.P.

On note $\mathbf{N}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, les ensembles des nombres naturels, réels et complexes, respectivement.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de $[1,+\infty[$ dans $\mathbf{C}$.

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $[1,+\infty[$ dans $\mathbf{C}$. Si $g \in \mathcal{B}$, on note $||g|| = \sup\{|g(t)|; t \geq 1\}$.

On dit que l'élément f de $\mathcal{C}$ admet un développement asymptotique en $+\infty$ si et seulement si il existe une famille $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{C}$ tels que pour tout n on ait

$$\lim_{x\to+\infty} x^n(f(x) - a_0 - a_1x^{-1} - \ldots - a_nx^{-n}) = 0.$$

Par abus de langage, on écrira que $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_nx^{-n}$ est un développement asymptotique de f en $+\infty$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions continues de $[1,+\infty[$ dans $\mathbf{C}$ admettant un développement asymptotique en $+\infty$.

On note Θ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ formé des couples (x,y) tels que $1 \leq x \leq y$.

I

Soit $K\colon \Theta \to \mathbf{C}$ une fonction bornée.

1. Soient $h \in \mathcal{B}$, $x \in [1,+\infty[$. Montrer que $\int_x^{+\infty} \frac{K(x,t)h(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente. On note $\mathrm{T}h(x)$ la valeur de cette intégrale.

2. Montrer que pour tout $h \in \mathcal{B}$, $\mathrm{T}h$ est aussi un élément de $\mathcal{B}$ et que $h \mapsto \mathrm{T}h$ est une fonction linéaire continue de l'espace vectoriel normé $\mathcal{B}$ dans lui-même.

3. Soient $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 0$, $x \in [1,+\infty[$ et $h \in \mathcal{B}$. Montrer que

$$|\mathrm{T}^n h(x)| \leq ||h|| \frac{k^n}{x^n n!}$$

où k est un réel indépendant de h et x que l'on précisera. En déduire que la série de fonctions $(\mathrm{T}^n h)_{n\geq 1}$ converge normalement sur $[1,+\infty[$.

4. Soit $h \in \mathcal{B}$. Montrer que la fonction $h + \sum_{n\geq 1}(\mathrm{T}^n h)$ appartient à $\mathcal{B}$ et est l'unique solution g de l'équation $g - \mathrm{T}g = h$.

II

1. Un élément f de $\mathcal{A}$ étant donné, montrer l'unicité des nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tels que $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n x^{-n}$ soit un développement asymptotique de f. Donner un exemple de fonction ne s'annulant pas sur $[1, +\infty[$ et admettant le développement asymptotique dont tous les coefficients sont nuls.

2. Si f et g sont des éléments de $\mathcal{A}$, montrer que $f + g$, et fg admettent des développements asymptotiques que l'on précisera en fonction de ceux de f et g.

3. Montrer que si f ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$ et admet le développement asymptotique $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n x^{-n}$, alors $1/f$ admet un développement asymptotique si et seulement si $a_0 \neq 0$.

4. Soit g une fonction continue sur $[-1, 1]$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$. Montrer que la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = g(1/t)$ admet un développement asymptotique.

5. Montrer que tout élément de $\mathcal{A}$ est élément de $\mathcal{B}$ mais que la réciproque n'est pas vraie.

III

On fixe α un nombre complexe de partie réelle strictement positive.
Si $\beta \in \mathbf{C}$, et $x \in [1, +\infty[$, on note

$$j_\beta(x) = e^{\alpha x} x^\beta \quad \text{et} \quad J_\beta(x) = \int_1^x e^{\alpha t} t^\beta \mathrm{d}t\ .$$

1. Donner une relation entre $J_\beta(x)$, $J_{\beta-1}(x)$, $j_\beta(x)$ et $j_\beta(1)$.

2. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{J_{\beta-1}(x)}{j_\beta(x)} = 0$ (on pourra supposer d'abord α et β réels). En déduire $\lim_{x\to+\infty} \frac{J_\beta(x)}{j_\beta(x)}$.

3. Montrer que la fonction $\frac{J_\beta}{j_\beta}$ admet le développement asymptotique

$$\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)}{\alpha^{n+1} x^n}.$$

4. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha t}t^{-\beta}\mathrm{d}t$.

5. On note $I_\beta(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\alpha t}t^{-\beta}\mathrm{d}t$ pour $x \geq 1$. Donner une relation entre $I_\beta(x)$, $I_{\beta+1}(x)$ et $j_\beta(x)$.

6. Montrer que la fonction $j_\beta I_\beta$ admet un développement asymptotique en $+\infty$ que l'on explicitera (s'inspirer des questions 2 et 3).

7. On suppose maintenant α non nul, $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$, et $\mathrm{Re}\,\beta > 0$. Montrer des résultats semblables à ceux des questions 2 et 6 dans ce cas (on justifiera la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha t}t^{-\beta}\mathrm{d}t$ en employant une intégration par parties) .

IV

On fixe α et β deux nombres complexes, et on suppose $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$. Pour $(x, y) \in \Theta$, on définit

$$L(x,y) = \int_x^y e^{\alpha(t-y)} \left(\frac{t}{y}\right)^\beta \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $(x,y) \mapsto e^{\alpha(x-y)} \left(\frac{x}{y}\right)^\beta$ est continue bornée sur Θ.

2. Montrer que L est continue sur Θ.

3. Montrer que $y \mapsto L(1, y)$ est bornée sur $[1, +\infty[$.

4. Exprimer $L(x, y)$ à l'aide d'une fonction d'une variable du type de celle introduite à la question précédente. En déduire que L est bornée sur Θ.

5. Soit un entier naturel $n \geq 2$. Montrer que la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{L(x,y)}{y^n}\mathrm{d}y$ appartient à $\mathcal{A}$ (utiliser l'expression de L obtenue à la question précédente).

Fixons $F\colon [1, +\infty[\to \mathbf{C}$ un élément de $\mathcal{A}$.

6. Montrer qu'il existe une et une seule fonction g, élément de $\mathcal{B}$, telle que pour tout $x \geq 1$,

$$g(x) = 1 - \int_x^{+\infty} \frac{F(y)L(x,y)}{y^2} g(y)\mathrm{d}y.$$

7. Montrer que g appartient à $\mathcal{A}$.

8. Montrer que g est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et

$$g'(x) = e^{\alpha x}x^\beta \int_x^{+\infty} \frac{F(y)g(y)}{y^{\beta+2}} e^{-\alpha y}\mathrm{d}y.$$

9. Montrer que $g' \in \mathcal{A}$.

10. Montrer que ce qui précède reste valable avec α et β tels que Re $\alpha = 0$ mais Re $\beta > 0$.