UL245

SESSION 2006

Filière : 2ème concours

MATHEMATIQUES

(Epreuve commune aux ENS Ulm et Lyon)

Durée : 3 heures

Les calculatrices sont interdites.

Tournez la page S.V.P.

Le sujet est composé de 5 pages et comprend deux exercices qui sont indépendants.

Exercice 1 *Le but de cet exercice est la construction d'une fonction infiniment dérivable non identiquement nulle et nulle en dehors d'un intervalle fermé.*

Étant donnée une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on appelle support de f le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ tel que f soit nulle sur son complémentaire. Si le support de f est borné, on dit que f est à support compact.

Soit α un réel strictement positif, on définit la fonction H_α pour x appartenant à $\mathbb{R}$ par

$$H_\alpha(x) = \begin{cases} 1/\alpha & \text{si } x \text{ appartient à }]0, \alpha[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels strictement positifs telle que

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j < \infty,$$

on note a cette limite. Pour m un entier positif ou nul, on note $C_{0,a}^m$ l'ensemble des fonctions de classe C^m sur $\mathbb{R}$ à support inclus dans l'intervalle $[0, a]$.

1. Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou possèdant un nombre fini de discontinuités et à support compact. On définit la fonction $f*g$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$ par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt.$$

Montrer que $f * g$ est une fonction à support compact et plus précisément que si α et β sont des réels strictement positifs et que f (respectivement g) est à support inclus dans $[0, \alpha]$ (respectivement $[0, \beta]$), alors $f * g$ est à support inclus dans $[0, \alpha+\beta]$. Donner également une expression simple de

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)dx.$$

2. On définit la fonction u_1 par

$$u_1 = H_{a_0} * H_{a_1}.$$

Déterminer explicitement u_1 et en déduire m_1, le plus grand entier m tel que u_1 appartienne à $C_{0,a}^m$.

3. On définit maintenant la fonction u_k, pour $k \geq 2$, par

$$u_k = u_{k-1} * H_{a_k}.$$

Déterminer m_k, le plus grand entier m tel que u_k appartienne à $C^m_{0,a}$.

4. Montrer que pour $k \geq 2$ et pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, on a pour $j \leq m_k$,

$$|u_k^{(j)}(x)| \leq \frac{2^j}{a_0 \dots a_j}.$$

5. Montrer que pour tout couple d'entiers k, m supérieurs ou égaux à 2, et pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, on a

$$|u_{k+m}(x) - u_m(x)| \leq 2(a_{m+1} + \dots + a_{m+k})/(a_0 a_1).$$

6. Montrer que, quand k tend vers $+\infty$, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction u appartenant à $C^\infty_{0,a}$. Montrer également que

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)dx = 1.$$

Exercice 2 *Le but de cet exercice est de donner certains critères de localisation des valeurs propres d'une matrice carrée à coefficients complexes.*

Soit n un entier strictement positif, on note $M_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. Pour p un entier strictement positif, on note de même, $M_{n,p}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$. Pour A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, on note

$$A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n},$$

on note également A^T la matrice transposée de A et $\sigma(A)$ le spectre de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A.

Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, on dit que A est **une matrice de permutation** s'il existe une permutation φ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ dans lui-même telle que pour $1 \leq i, j \leq n$,

$$a_{ij} = \delta_{i\,\varphi(j)},$$

avec

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, on dit que A est **une matrice réductible** s'il existe une matrice de permutation M appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, telle qu'il existe deux entiers strictement positifs n_1 et n_2 (avec $n_1 + n_2 = n$), une matrice B appartenant à $M_{n_1}(\mathbb{C})$, une matrice D appartenant à $M_{n_2}(\mathbb{C})$ et une matrice C appartenant à $M_{n_1,n_2}(\mathbb{C})$ telles que

$$A = M^T \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} M = M^T \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n_1} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n_2} \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ b_{n_11} & b_{n_12} & \dots & b_{n_1n_1} & c_{n_11} & c_{n_12} & \dots & c_{n_1n_2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n_2} \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{n_21} & d_{n_22} & \dots & d_{n_2n_2} \end{pmatrix} M.$$

Une matrice irréductible est une matrice qui n'est pas réductible.

Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, on dit que A est **une matrice à diagonale fortement dominante** si pour tout i, $1 \leq i \leq n$,

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j;j\neq i} |a_{ij}|$$

et si au moins l'une de ces inégalités est stricte.

Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, pour $i = 1, \dots, n$, on note enfin

$$r_i(A) = \sum_{j;j\neq i} |a_{ij}|.$$

Première partie : Disques de Geršgorin

1. Soient A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$ et i appartenant à $\{1, 2, \dots, n\}$, on note D_i la partie du plan complexe correspondant au disque de centre a_{ii} et de rayon $r_i(A)$, appelée disque de Geršgorin. On note également

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} D_i.$$

Montrer que

$$\sigma(A) \subset \Gamma$$

et en déduire que pour tout λ appartenant à $\sigma(A)$,

$$|\lambda| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

2. On suppose, dans cette question, que A est une matrice irréductible. On suppose, de plus, qu'une valeur propre λ de A (qui appartient donc à Γ) est située sur la frontière de Γ, c'est-à-dire que $|\lambda - a_{ii}| \geq r_i(A)$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$.

(a) On note

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ et I l'ensemble défini par

$$I = \left\{ i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ tel que } |x_i| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \right\}.$$

Montrer que I est un ensemble non vide et que si i appartient à I alors

$$\sum_{j; j \neq i} |a_{ij}| \left(\max_{1 \leq k \leq n} |x_k| - |x_j| \right) \leq 0.$$

(b) Montrer en utilisant le caractère irréductible de A que le complémentaire de I est égal à l'ensemble vide.

(c) En déduire que $|\lambda - a_{ii}| = r_i(A)$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$.

3. Déduire de la question précédente qu'une matrice A à diagonale fortement dominante et irréductible est inversible.

Deuxième partie : ovales de Cassini

4. On désire obtenir un résultat un peu plus fin que dans la première partie. On suppose maintenant que $n \geq 2$. Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, on définit, pour i différent de j, $1 \leq i, j \leq n$,

$$\mathcal{K}_{ij} = \{z \in C : |(z - a_{ii})(z - a_{jj})| \leq r_i(A) r_j(A)\};$$

ces ensembles sont appelés ovales de Cassini. On note également

$$\mathcal{K} = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \mathcal{K}_{ij}.$$

Montrer que

$$\sigma(A) \subset \mathcal{K} \subset \Gamma.$$

5. On suppose dans cette question que $n \geq 3$, proposer la construction d'un troisième ensemble $\mathcal{L}$, suite logique de Γ et $\mathcal{K}$, pour lequel on penserait avoir l'inclusion de $\sigma(A)$ dans $\mathcal{L}$. Montrer, en prenant l'exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que ce n'est pas le cas.

Troisième partie : Une autre propriété des disques de Geršgorin

6. On suppose que $n \geq 2$, soient A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$ et S un sous-ensemble non vide de $\{1, 2, \ldots, n\}$ différent de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note $|S|$ son cardinal et S^c son complémentaire. On suppose que

$$\left(\bigcup_{i \in S} D_i \right) \bigcap \left(\bigcup_{i \in S^c} D_i \right) = \emptyset.$$

Montrer que $\cup_{i \in S} D_i$ contient exactement $|S|$ valeurs propres de A.

Indication : On pourra introduire pour t appartenant à $[0, 1]$ la matrice $A(t)$ dont les coefficients sont définis pour $1 \leq i, j \leq n$ par

$$(A(t))_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i = j, \\ ta_{ij} & \text{sinon.} \end{cases}$$