

SESSION 2006

Filière : 2^{ème} concours

PHYSIQUE

(Epreuve commune aux ENS Ulm et Lyon)

Durée : 3 heures

L'usage des calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, sans imprimante et sans document d'accompagnement est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail. Aucun échange n'est permis entre les candidats.

Interférométrie optique

Les parties du problème sont largement indépendantes. Il est conseillé toutefois de lire intégralement l'énoncé, des résultats fournis dans une partie pouvant être exploités dans une autre. La calculatrice est autorisée. Les quantités vectorielles sont notées en caractères gras.

On étudie dans ce problème le principe de deux interféromètres optiques : l'interféromètre de Fabry-Pérot et l'interféromètre de Michelson. On adopte pour la lumière une représentation scalaire. On considèrera dans tout le problème une onde plane de pulsation ω et de vecteur d'onde dans le vide \mathbf{k} se propageant dans un milieu homogène d'indice n . On rappelle que le champ électrique d'une telle onde peut s'écrire $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \Re[E_0 e^{i(n\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}]$. On note $E = E_0 e^{in\mathbf{k}\mathbf{r}}$ l'amplitude complexe de l'onde et E^* le complexe conjugué de E . L'intensité de l'onde, soit la puissance traversant une unité de surface perpendiculaire au faisceau, est prise égale à $n|E|^2$. On suppose que les faisceaux gardent une section constante tout au long de leur parcours.

I. ELÉMENTS OPTIQUES SIMPLES

a. Miroir parfait

On modélise un miroir plan comme l'interface $x = 0$ entre un conducteur parfait et le vide. Les conditions de passage des champs imposent pour une incidence normale (\mathbf{k} orthogonal au plan miroir), $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = 0$ sur le plan $x = 0$ pour tout t . On note E_{in} l'amplitude du champ incident venant des x négatifs, E_ρ celle du champ réfléchi par le miroir, ρ le coefficient de réflexion en amplitude défini par le rapport E_ρ/E_{in} en $x = 0$.

1. Montrer que $\rho = -1$.
2. Donner l'expression du champ total et montrer que l'onde lumineuse est une onde stationnaire d'expression

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = 2E_{in} \sin(kx) \sin(\omega t)$$

3. Représenter graphiquement la variation de l'amplitude du champ en fonction de x . Justifier le qualificatif de « stationnaire ».

b. *Lame séparatrice*

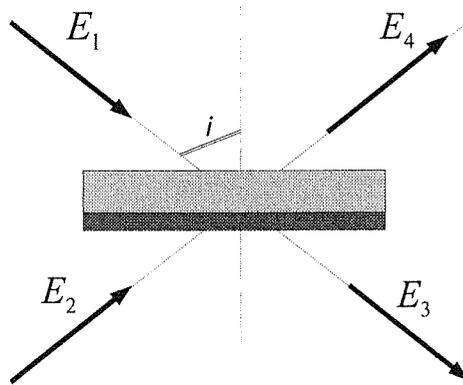


FIG. 1 – Schéma de principe d'une lame séparatrice

En traitant la surface d'une lame de verre d'épaisseur e d'indice n on peut préparer des lames séparatrices permettant de diviser un (ou deux) faisceau(x) incident(s) en un (ou deux) faisceau(x) réfléchi(s) et transmis. Le schéma de principe d'une telle lame est présentée figure 1. L'angle d'incidence i est fixé. La surface traitée est surlignée. On note E_1 et E_2 l'amplitude des ondes entrantes, E_3 et E_4 l'amplitude des ondes sortantes. Ces amplitudes vérifient sur la lame les relations :

$$\begin{cases} E_3 = tE_1 - rE_2 \\ E_4 = rE_1 + tE_2 \end{cases} \quad (1)$$

r et t sont les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude, supposés réels, de la lame. On pose $r^2 = R$ et $t^2 = T$ les coefficients de réflexion et de transmission en énergie.

1. Quelle est la relation entre R et T pour qu'aucune énergie ne s'accumule dans la lame ?
2. Quel est l'effet de l'épaisseur de la lame ?
3. On supposera par la suite les lames infiniment fines. On travaillera avec deux types de lames : des lames dont le traitement est optimisé pour $R = 0.99$ sous incidence normale ($i = 90^\circ$) (lames de type 1, dites miroirs de couplage), et des lames dont le traitement est optimisé pour $R = 0.50$ sous incidence $i = 45^\circ$ (lames de type 2, dites lames séparatrices équilibrées). Donner les valeurs de r et t correspondantes.

II. INTERFÉROMÈTRE DE FABRY-PÉROT

On considère un interféromètre de Fabry-Pérot de type asymétrique représenté figure 2. Il est constitué d'une lame de type 1 et d'un miroir plan parallèles et séparés d'une distance L ajustable. L'ensemble est placé sous vide. On appelle E_{in} l'amplitude du champ incident, E_ρ et E_τ celle des champs réfléchis et transmis par l'interféromètre, E et E' celle des champs intracavité se propageant dans le sens des x positifs et négatifs. Le plan de référence $x = 0$ est pris sur la face d'entrée de l'interféromètre.

1. Ecrire les équations reliant les amplitudes E_{in} , E , E' et E_ρ en $x = 0$.
2. Exprimer E' en fonction de E et de $\varphi = 2kL$. Donner la signification physique du déphasage φ .
3. Que représente la quantité $|E/E_{in}|^2$? Donner son expression en fonction de φ . Qu'arrive-t-il pour $L = p\lambda/2$ où p est un entier ? Ce phénomène est une résonance d'ordre p . Commenter la valeur de $|E/E_{in}|^2$ à la résonance et entre deux résonances.
4. Représenter graphiquement l'allure de la variation de $|E/E_{in}|^2$ en fonction de φ . On définit la finesse \mathcal{F} de la cavité comme le rapport de l'écart entre deux pics successifs et la largeur à mi-hauteur d'un pic de résonance. Exprimer \mathcal{F} en fonction de r et donner sa valeur numérique.
5. A partir des équations obtenues, exprimer E_ρ en fonction de E_{in} . En déduire que le coefficient de réflexion en amplitude s'écrit

$$\rho = \frac{r - e^{i\varphi}}{1 - re^{i\varphi}}$$

Que dire de $\mathcal{R} = |\rho|^2$? On pose dans la suite $\rho = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$.

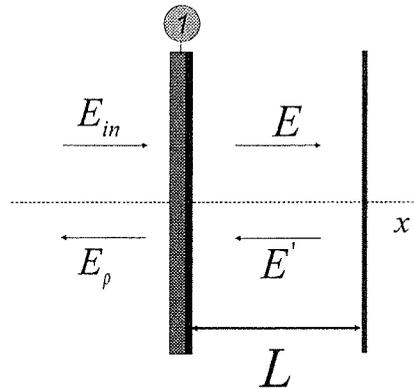


FIG. 2 – Interféromètre de Fabry-Pérot asymétrique se composant d'une lame séparatrice de type 1 et d'un miroir parfait dans le vide séparés d'une distance L .

6. Montrer qu'il s'établit en $x < 0$ est une onde stationnaire d'expression

$$\mathcal{E} = 2E_{in} \cos(\theta/2 - kx) \cos(\theta/2 - \omega t)$$

Dessiner la structure de l'onde à la résonance. Où se trouvent les noeuds et les ventres ?

7. La figure 3 représente la variation de θ en fonction de φ . Commenter les points suivants :
- la valeur de θ hors résonance
 - la largeur de la résonance en fonction de la réflectivité du miroir d'entrée
 - la variation de phase $\Delta\theta$ du champ réfléchi au passage d'une résonance
8. Comment peut-on mettre en évidence expérimentalement le phénomène de résonance ?
9. On règle l'interféromètre sur une résonance d'ordre p et on introduit un déphasage $\delta\varphi \ll 1$ tel que $\varphi = 2p\pi + \delta\varphi$. Montrer que

$$\rho \sim -\frac{1 - r + i\delta\varphi}{1 - r - ir\delta\varphi}$$

10. On considère une variation de phase $\delta\varphi$ très faible, *i.e.* telle que la résonance d'ordre p est maintenue. Quelle inégalité vérifie $\delta\varphi$? Montrer que dans ce cas on a

$$\rho \sim -1 \left(1 + i\delta\varphi \frac{1+r}{1-r} \right)$$

En déduire la variation de phase $\delta\theta$ de l'onde réfléchie induite par la variation $\delta\varphi$.

11. L'interféromètre est réglé sur une résonance d'ordre p . On intercale entre la lame de couplage et le miroir parfait une lame d'indice n d'épaisseur e . Quelle est la variation $\delta\varphi$ correspondante? Quelle condition n et e doivent-ils vérifier pour que la résonance soit maintenue? Commenter la faisabilité de cette condition avec des éléments optiques usuels en laboratoire.

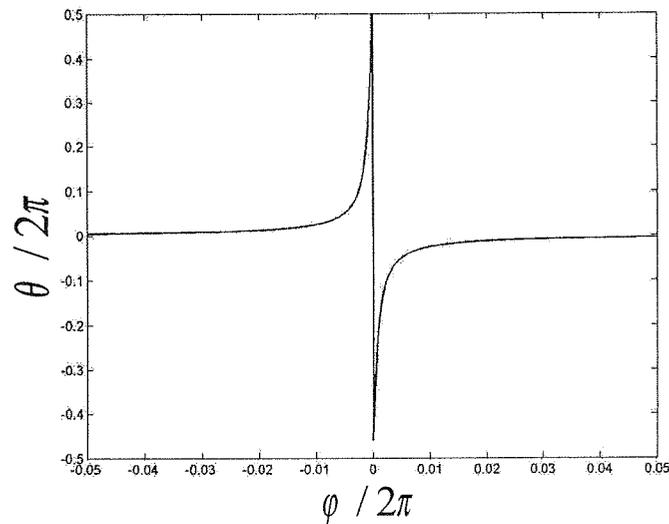


FIG. 3 – Phase du champ réfléchi θ en fonction de la phase φ .

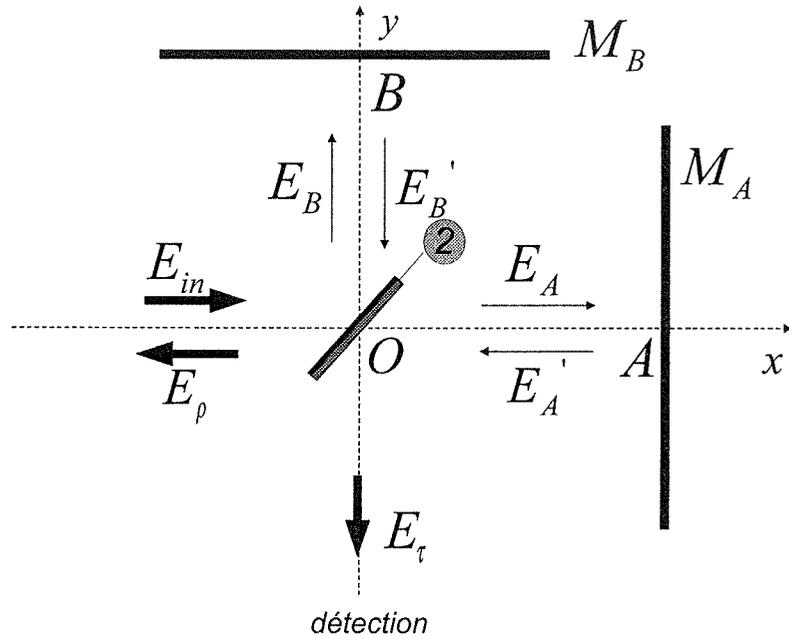


FIG. 4 – Interféromètre de Michelson

III. INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON

On considère un interféromètre de Michelson représenté figure 4 composé de deux miroirs parfaits et d'une lame séparatrice de type 2. La distance $OA = L_A$ est fixe. La distance OB peut être balayée en traduisant le miroir correspondant, on note $OB = L_B$ ajustable. L'interféromètre est placé dans une enceinte sous vide.

1. Donner l'expression des champs E_A , E_A' , E_B et E_B' en fonction de l'amplitude complexe du champ incident E_{in} .
2. En déduire l'expression de l'amplitude de l'onde transmise E_t et de celle de l'onde réfléchie E_ρ par l'interféromètre, ainsi que les intensités transmise I_t et réfléchie I_r . On introduira le déphasage ψ entre les deux bras de l'interféromètre,

$$\psi = 2k(n_B L_B - n_A L_A)$$

3. Vérifier que le système est sans pertes.
4. Tracer la variation de $I_t(\psi)$.
5. On suppose que le déphasage entre les deux bras de l'interféromètre subit une petite variation et s'écrit $\psi + \delta\psi$ où $\delta\psi \ll 1$. Montrer que l'intensité transmise vérifie

$$I_t = \left[\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin(\psi)\frac{\delta\psi}{2} \right] I_{in}$$

Pour quelle valeur de ψ la mesure de I_t est-elle la plus sensible à une variation du déphasage $\delta\psi$? Interpréter graphiquement ce résultat.

6. La théorie de la relativité générale prédit que des événements astronomiques violents de type supernovae génèrent des ondes gravitationnelles (OG) de fréquence typique 1 kHz . Ces ondes gravitationnelles provoquent de très faibles modifications anisotropes de l'indice du vide. L'onde que l'on souhaite détecter ici impose $n = 1 + \varepsilon/2$ (respectivement $n = 1 - \varepsilon/2$) dans le bras OB (respectivement OA) de l'interféromètre, avec $\varepsilon = 10^{-21}$. Montrer que l'on peut traiter le phénomène d'interférence sans tenir compte de la dépendance temporelle de l'OG.
7. Exprimer en fonction de ε la variation $\delta\psi$ du déphasage entre les deux bras de l'interféromètre lors du passage de l'OG.
8. *Application numérique* On utilise les données de l'interféromètre européen VIRGO : $\lambda = 1 \mu\text{m}$, $L_A \simeq L_B \simeq 3 \text{ km}$, $L_B - L_A \leq 1 \text{ m}$. On supposera une intensité incidente de 1 W/cm^2 . Calculer $\delta\psi$ et la variation *maximale* d'intensité transmise par VIRGO que l'on prévoit lors de la perturbation gravitationnelle.
9. On améliore la sensibilité du détecteur d'OG en intercalant dans chaque bras de l'interféromètre un miroir de couplage de type 1 (voir figure 5). les deux bras contiennent chacun un interféromètre de Fabry-Pérot de même longueur $L \simeq 3 \text{ km}$. Ils sont réglés sur une résonance telle qu'étudiée dans la partie II. On note ℓ_A et ℓ_B les distances entre la lame séparatrice et les miroirs d'entrée des interféromètres de Fabry-Pérot, avec $\ell_A \simeq \ell_B \simeq 1 \text{ m}$. Montrer que l'ajout des miroirs de couplage ne modifie pas l'intensité de sortie en l'absence d'OG.
10. Pourquoi a-t-on intérêt à placer les miroirs de couplage le plus loin possible des miroirs parfaits?

11. Exprimer le déphasage ψ entre les deux bras de l'interféromètre en l'absence d'OG en fonction de ℓ_A et ℓ_B .
12. Exprimer le déphasage additionnel $\delta\psi$ du à la perturbation gravitationnelle en fonction de k , L , ε et r . On utilisera les résultats de la partie II. On négligera l'effet de l'OG sur les longueurs ℓ_A et ℓ_B .
13. Montrer que l'intensité transmise par VIRGO au passage de l'OG s'écrit maintenant

$$I_t = \left(\sin^2 \left(\frac{\psi}{2} \right) + kL\varepsilon \frac{1+r}{1-r} \sin(\psi) \right) I_{in}$$

14. *Application numérique* : calculer la variation d'intensité induite par l'OG dans cette nouvelle configuration.

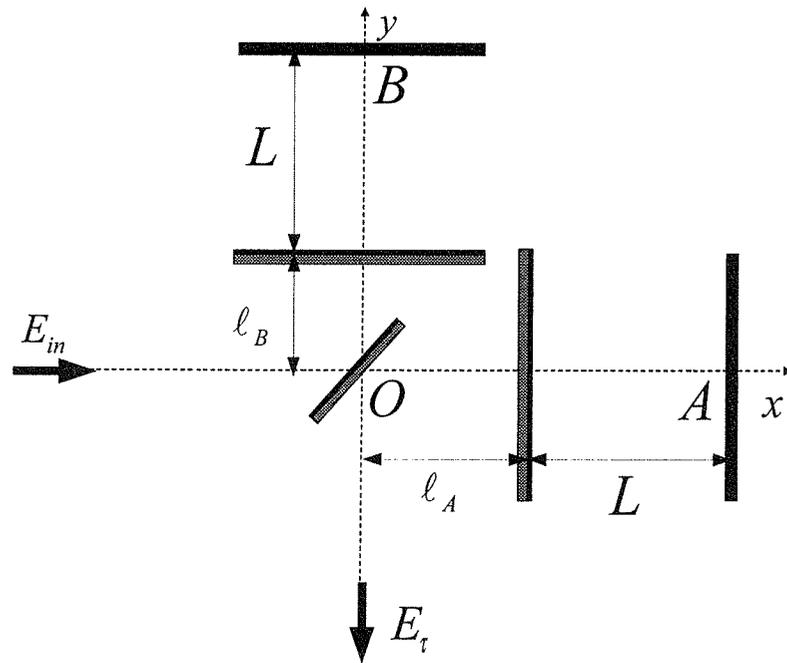


FIG. 5 – Principe de l'interféromètre VIRGO