SESSION 2003

Filière BCPST

PHYSIQUE

Epreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Tournez la page S.V.P.

Ce problème comporte deux parties indépendantes. La partie A étudie quelques aspects spécifiques aux écoulements géophysiques, c'est-à-dire les écoulements de fluides à l'échelle planétaire, dans l'atmosphère ou les océans. La partie B aborde quant à elle les principes de l'imagerie par rayons X, applicables à l'imagerie médicale (radiographie, scanner) ou à l'étude non-destructive de spécimens biologiques ou géologiques.

A. Ecoulement d'un fluide dans un repère en rotation – forces de Coriolis

On étudie dans cette partie quelques conséquences de la rotation terrestre sur la dynamique des écoulements océaniques ou atmosphériques. A l'exception des référentiels **R** et **R'**, les quantités en **gras** désignent des vecteurs.

A.1. On considère deux référentiels **R** et **R'** associés respectivement à deux repères d'espace orthonormés (Ox, Oy, Oz) et (O'x', O'y', O'z'). On note $\mathbf{e_x}$, $\mathbf{e_y}$, $\mathbf{e_z}$, $\mathbf{e_{x'}}$, $\mathbf{e_{y'}}$ et $\mathbf{e_{z'}}$ les vecteurs unitaires définissant les axes de coordonnées. On suppose $\mathbf{e_z} = \mathbf{e_{z'}}$ et que les vecteurs $\mathbf{e_{x'}}$ et $\mathbf{e_{y'}}$ ainsi que le point O' tournent à vitesse angulaire Ω constante autour de l'axe z, le trièdre ($\mathbf{e_{x'}}$, $\mathbf{e_{y'}}$, $\mathbf{e_{z'}}$) restant orthonormé. La distance OO' reste constante. Ainsi, tout point fixe dans **R'** tourne dans **R** à vitesse angulaire constante Ω autour de $\mathbf{e_z}$.

a) Au temps t = 0, on a $\mathbf{e_x} = \mathbf{e_{x'}}$. Exprimer $\mathbf{e_{x'}}$, $\mathbf{e_{y'}}$ et $\mathbf{e_{z'}}$ en fonction de Ω, t et des vecteurs $\mathbf{e_x}$, $\mathbf{e_y}$, $\mathbf{e_z}$.

b) On note $(d\mathbf{u}/dt)_\mathbf{R}$ la dérivation temporelle d'un vecteur **u** quelconque par rapport à un référentiel **R**. Elle correspond à la dérivée par rapport au temps du vecteur **u**, les vecteurs de bases de **R** étant supposés constants. Montrer que $(d\mathbf{u}/dt)_\mathbf{R} = (d\mathbf{u}/dt)_\mathbf{R'} + \Omega \wedge \mathbf{u}$ où $\Omega = \Omega\, \mathbf{e_z}$ est le vecteur rotation.

c) Exprimer la vitesse $\mathbf{v_R}$ d'un point matériel M dans le référentiel absolu **R** en fonction de la vitesse $\mathbf{v_{R'}}$ du même point dans le référentiel tournant **R'**, du vecteur rotation Ω et du rayon vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$.

d) Exprimer l'accélération $(d\mathbf{v_R}/dt)_\mathbf{R}$ dans le référentiel absolu **R** en fonction de **r**, $\mathbf{v_{R'}}$, $(d\mathbf{v_{R'}}/dt)_\mathbf{R'}$ et Ω.

e) Ecrire le principe fondamental de la dynamique pour un point matériel M de masse m soumis à une force **F** dans le référentiel galiléen **R**. On mettra le résultat sous la forme $m(d\mathbf{v_{R'}}/dt)_\mathbf{R'} = \mathbf{F} + \mathbf{F_i} + \mathbf{F_c}$ où $\mathbf{F_c} = 2m\, \mathbf{v_{R'}} \wedge \Omega$ est appelée force de Coriolis. Justifier l'appellation « force centrifuge » donnée à $\mathbf{F_i}$.

A.2. On précise maintenant le choix des référentiels **R** et **R'**. On munit le référentiel **R** d'un repère dont l'origine O est le centre de la Terre et dont les axes sont définis par la position d'étoiles lointaines. Ce référentiel peut être considéré comme galiléen. Le référentiel **R'** est muni d'un repère cartésien orthonormé dont le centre O' est à la surface de la Terre, en un point de latitude θ et de longitude ϕ. L'axe O'x' est dirigé vers l'est, O'y' vers le nord et O'z' vers le zénith (verticale ascendante).

a) Exprimer la force de gravitation $\mathbf{F_g}$ agissant sur une particule de masse m située à une altitude z'. On notera G la constante de gravitation universelle, M_T la masse la Terre et R_T le rayon terrestre (la Terre est supposée sphérique).

b) La valeur moyenne du rayon terrestre R_T est de 6371 km. Sachant que la plus profonde fosse océanique a une profondeur de 11 km et que 99% de la masse de l'atmosphère est concentrée dans les 50 premiers kilomètres, quelle approximation est-il légitime de faire sur $\mathbf{F_g}$ afin de l'appliquer à des particules de fluide océanique ou atmosphérique ?

c) Soit $\mathbf{g}$ l'accélération de la pesanteur définie par m $\mathbf{g} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_i}$. Sachant que g = 9,832 ms^{-2} aux pôles et g = 9,78 ms^{-2} à l'équateur, calculer la vitesse angulaire de rotation terrestre Ω (g est la norme du vecteur $\mathbf{g}$). Commenter. Dans la suite on considèrera que la pesanteur est constante, avec g = 9,81 ms^{-1}.

A.3. Ecrire l'équation d'Euler de la mécanique des fluides dans le repère tournant (O'x'y'z') pour un fluide incompressible de masse volumique ρ donnée. Pour alléger les notations, on renomme (Oxyz) le repère (O'x'y'z') et on remplace $\mathbf{v_{R'}}$ par $\mathbf{u}$ pour désigner la vitesse du fluide.

A.4. On introduit les grandeurs U et L qui sont respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques de l'écoulement.

a) Rappeler la définition du nombre de Reynolds pour un fluide de viscosité cinématique ν. De quels effets physiques ce nombre sans dimension mesure-t-il l'intensité relative ?

b) On définit le nombre de Rossby Ro, comme le rapport de la norme de l'accélération convective sur la norme de l'accélération de Coriolis $\mathbf{a_c} = \mathbf{f_c}/\rho$. Exprimer Ro en fonction des données caractéristiques du problème (U,L,Ω).

c) On considère des écoulements atmosphériques. Ω correspond alors à la vitesse de rotation angulaire de la Terre. Quel est l'ordre de grandeur du nombre de Rossby pour l'écoulement dans un anticyclone (U = 10 m/s, L = 1000 km) ? Que vaut-il dans le cas d'un typhon (U = 100 m/s, L = 10 km) ? Quels termes peut-on négliger et quels termes doit-on conserver dans les équations pour chacun de ces deux cas ?

A.5. Les écoulements pour lesquels le nombre de Rossby est faible (Ro << 1) sont appelés écoulements « géostrophiques ». On suppose que cette condition est remplie et on considère un écoulement stationnaire.

a) Ecrire la relation vectorielle reliant le gradient de pression à la vitesse du fluide $\mathbf{u}$ et au vecteur rotation Ω.

b) On appelle pression « réduite » la quantité $q = p + \rho g z$. Si l'on néglige la vitesse verticale du fluide ainsi que la composante verticale de la force de Coriolis que peut-on dire des orientations relatives du vecteur vitesse et du gradient de q? Quelle conséquence cela a-t-il sur la lecture des cartes météorologiques qui représentent les courbes isobares à une altitude z donnée ?

B. Imagerie par rayons X

Formulaire et notations

Constante de Planck : $h = 6{,}63\ 10^{-34}$ J s.
Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3{,}0\ 10^{8}$ m s^{-1}.
Charge élémentaire : $e = 1{,}6\ 10^{-19}$ C.
Permittivité électrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85\ 10^{-12}$ kg^{-1} m^{-3} s^{4} A^{2}.
Electron-volt : 1 eV = $1{,}6\ 10^{-19}$ J.
Nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}02\ 10^{23}$.

B.1. La lumière, et plus généralement toute onde électromagnétique, a à la fois une nature ondulatoire et corpusculaire. Les « particules de lumière » sont les photons dont l'énergie est donnée par la relation $E = h\nu$ où h est la constante de Planck et ν la fréquence de l'onde électromagnétique associée.

a) On considère une onde électromagnétique plane monochromatique de longueur d'onde λ rencontrant un obstacle percé d'un trou de taille a. Sous quelle condition l'approximation de l'optique géométrique est-elle valable ?

b) Les rayons X utilisés en imagerie médicale (radiographie) sont souvent caractérisés par leur énergie E, exprimée en électron-volts (eV). Quelle est la longueur d'onde associée à un photon X d'énergie E ? Quelle la valeur de cette longueur d'onde pour des photons d'énergie E = 40 keV ?

c) On considère un milieu dense (solide ou liquide) de masse volumique ρ, constitué d'une espèce de masse molaire atomique A. Quelle est la distance moyenne entre atomes dans un tel milieu ? Le graphite est constitué de carbone (A=12 g mol^{-1}) et sa masse volumique est 2,2 g cm^{-3}. Donner la valeur de la distance entre atomes de carbone dans ce matériau. A la lumière de B.1.a) et B.1.b), que peut-on conclure ? Dans toute la suite, on négligera tout phénomène de diffraction et on considèrera que les photons se propagent en lignes droites, lignes identifiables aux rayons lumineux.

B.2. Lorsqu'un faisceau de photons X est dirigé sur un obstacle matériel, une partie des photons est absorbée par l'obstacle et l'autre est transmise. De façon schématique, on peut dire que les photons rencontrant un atome sont absorbés, et que ceux qui passent « entre » les atomes sont transmis.

a) On considère une mince couche de matière de surface dS et d'épaisseur dz. Cette couche est constituée d'un matériau de masse volumique ρ et de masse molaire A. Déterminer le nombre d'atomes contenus dans la couche.

b) Quand dz est très petit, tous les atomes de la couche sont situés dans le même plan. On suppose que le rayon de ces atomes vaut r_A. Exprimer le nombre de photons transmis N(z+dz) en fonction du nombre de photons incidents N(z) et des paramètres ρ, A, r_A et dz. Les photons sont supposés se propager le long de l'axe z, vers les z croissants.

c) En faisant tendre dz vers 0, établir l'équation différentielle du 1[er] ordre satisfaite par la fonction N(z) .

d) En supposant que la constitution du matériau (et donc ρ, A et r_A) dépend de z, résoudre cette équation différentielle. On mettra le résultat sous la forme :

$$N(z)=N_0 \exp(-\int_0^z \mu(z')dz').$$

B.3. Afin de mettre l'expression de $\mu(z)$ sous une forme utilisable en pratique, il faut exprimer le rayon atomique r_A en fonction notamment du numéro atomique Z de l'atome considéré. Nous allons pour cela considérer un modèle d'atome extrêmement simplifié et préciser le mécanisme d'absorption des photons X. L'absorption des photons X par les atomes est due à l'effet photoélectrique : un électron lié à son atome avec une énergie de liaison E est arraché de l'atome s'il est frappé par un photon d'énergie supérieure à E. Le processus peut s'écrire symboliquement : photon +électron lié → électron libre.

a) Dans le modèle « classique » de l'atome, parfois appelé « modèle planétaire », les électrons sont en orbite autour du noyau supposé fixe auquel ils sont liés par l'interaction coulombienne. Exprimer la force de Coulomb exercée par le noyau d'un atome de numéro atomique Z sur un de ces électrons. On introduira la constante $k = 1/ 4\pi\varepsilon_0$.

b) On considère que l'électron est en mouvement circulaire uniforme à une distance r_e autour du noyau. En écrivant le principe fondamental de la dynamique pour l'électron, démontrer que $2E_c = -E_p$, où E_c et E_p sont respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle électrostatique. Donner l'énergie mécanique E_m de l'électron. On notera m_e la masse de l'électron.

c) Quel est le moment cinétique J de l'électron ? La mécanique quantique impose que ce moment cinétique ne peut prendre que des valeurs discrètes définies par la relation : $J = n\, h / 2\pi$ où n est un nombre entier. Quelles sont les valeurs possibles r_n du rayon de l'orbite de l'électron ? Exprimer l'énergie mécanique E_n pour chacune de ces orbites. Montrer finalement que l'on a $r_n = -(k\, n^2\, Z\, e^2)/2E$ où E est l'énergie du niveau n=1.

d) On définit le rayon de l'atome r_A comme le rayon maximal autorisé par la formule ci-dessus. Dans une description quantique partielle, chaque orbite r_n peut être occupée par n électrons. Quelle est la valeur maximale de n accessible pour un atome de numéro atomique Z ? (On fera pour simplifier l'approximation $n >> 1$). Exprimer r_A en fonction de k, Z, e et E.

e) Pour tous les éléments, le rapport A/Z vaut approximativement 2. Montrer que le coefficient d'absorption μ est égal à $C \rho Z^3 E^{-2}$ où C est une constante. En pratique, on constate que cette formule est applicable en prenant pour E l'énergie des photons incidents et en définissant pour les matériaux poly-atomiques un numéro atomique effectif Z_m qui est une moyenne pondérée des numéros atomiques des constituants.

B.4 On dispose d'une source monochromatique de rayons X, dont on peut régler la longueur d'onde et on sonde des matériaux de numéros atomiques et masses volumiques différents. Pour un certain nombre de composants du corps humain, on donne :

	Masse volumique ρ (g/cm^3)	Numéro atomique moyen Z_m
Air	0,00129	7,64
Graisse	0,91	5,92
Eau	1	7,42
Os	1,85	13,8

a) Calculer μ pour ces différents milieux traversés en prenant E = 40 keV. Discuter l'influence sur l'intensité transmise et sur le contraste des paramètres ρ, Z et E ainsi que de l'épaisseur d de l'échantillon.

b) Le modèle développé dans ce problème est extrêmement simplifié. En réalité, le coefficient d'absorption μ est donné par l'expression $\mu(\rho,Z,E) = \rho Z^3\alpha(E) + \rho\beta(E)$ où α et β sont des fonctions données de l'énergie E. Proposer une méthode permettant de déterminer ρ et Z pour un échantillon de composition et de masse volumique inconnues.