Notations

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$, celui des nombres réels non nuls est noté $\mathbb{R}^*$, l'ensemble des vecteurs de dimension deux à cœfficients réels est noté $\mathbb{R}^2$ et celui des matrices carrées de dimension deux à cœfficients réels est noté $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

De même, $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes et $\mathbb{C}^2$ celui des vecteurs de dimension deux à cœfficients complexes.

Pour un vecteur $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $||X||$ désigne la norme euclidienne de X : $||X|| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$.

Pour deux vecteurs $U_1 \in \mathbb{R}^2$ et $U_2 \in \mathbb{R}^2$, on notera $P = (U_1|U_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice dont la première colonne est U_1 et la deuxième colonne est U_2.

Pour une fonction de deux variables $u(t,x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)$ désigne la dérivée partielle de u par rapport à t, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x)$ désigne sa dérivée partielle par rapport à x, et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ désigne sa dérivée partielle seconde par rapport à x.

Pour une fonction d'une seule variable $u(t)$, $\dfrac{du}{dt}(t)$ désigne la dérivée de u par rapport à t.

Pour $L > 0$, $\mathcal{C}^2([0,L])$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur $[0,L]$ dont la dérivée seconde existe et est continue.

Enfin, on notera S l'ensemble des fonctions $u : [0,\infty[\times[0,L] \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto u(t,x)$ continues sur $[0,\infty[\times[0,L]$, telles que $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ existe et soit continue sur $[0,\infty[\times[0,L]$ et telles que $\forall t \in [0,+\infty[$, $x \mapsto u(t,x) \in \mathcal{C}^2([0,L])$.

1 La diffusion

L'équation de la diffusion sur le domaine monodimentionnel $[0,L]$ est :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \tag{1.1}$$

où

- $u(t,x) \in \mathbb{R}$ est la quantité qui diffuse,
- $t \in [0,+\infty[$ est le temps,
- $x \in [0,L]$ est l'espace,
- $d \in [0,+\infty[$ est un cœfficient décrivant la vitesse de diffusion.

Cette équation est complétée par des *conditions aux bords* :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0, \tag{1.2}$$

5. On dit que la diffusion “lisse” les conditions initiales, et lisse plus vite les hautes fréquences. Expliquer brièvement pourquoi cette affirmation est illustrée par le résultat précédent.

2 Une équation de réaction-diffusion

On considère maintenant l'équation de *réaction-diffusion* sur $[0, L]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = f(u(t,x)) + d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \tag{2.4}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction décrivant le bilan entre la création et la destruction de u dues aux réactions chimiques (ces réactions sont supposées catalysées par u et c'est la raison pour laquelle f dépend de u). Les autres termes de l'équation (2.4) sont définis comme pour l'équation (1.1). L'équation (2.4) est complétée par les conditions aux bords (1.2) et par une condition initiale. On admettra que si la condition initiale $u(0,x) \in \mathcal{C}^2([0,L])$, les solutions de (2.4), (1.2), lorsqu'elles existent pour tout $t \in [0, +\infty[$, sont dans l'ensemble S défini dans la partie **Notations**.

- On dit que $u_0 \in \mathbb{R}$ est un *équilibre de la réaction* si $f(u_0) = 0$.
- On dira qu'un équilibre de la réaction u_0 est *asymptotiquement stable par rapport aux perturbations de la forme* $u_p(x)$ pour l'équation (2.4) si, lorsque la condition initiale est $u(0,x) = u_0 + u_p(x)$, la solution de (2.4) vérifie $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,x) = u_0$ pour tout $x \in [0, L]$.

1. On suppose pour commencer que $d = 0$. Soit u_0 un équilibre de la réaction. On suppose que f est dérivable en u_0. Soit $x_0 \in [0, L]$ fixé.
   (a) Etude linéaire :
   On suppose que la condition initiale de l'équation (2.4) vérifie $u(0,x_0) = u_0 + u_p(x_0)$ où la perturbation $u_p(x_0)$ est supposée *petite*. On pose $\bar{u}(t) = u(t,x_0) - u_0$. Expliquer brièvement pourquoi, tant que $\bar{u}(t)$ est assez petit, sa dynamique peut être décrite de façon approchée par
   $$\frac{d\bar{u}}{dt}(t) = f'(u_0)\ \bar{u}(t), \tag{2.5}$$
   avec une condition initiale que l'on précisera. Calculer alors $\bar{u}(t)$, solution de l'équation (2.5) avec cette condition initiale. Donner la condition sur $f'(u_0)$ pour que u_0 soit asymptotiquement stable par rapport à toutes les perturbations suffisamment petites, d'après l'équation (2.5).
   (b) Etude non-linéaire :
   On suppose que $f'(u_0) < 0$.
      i. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall u \in [u_0 - \eta, u_0 + \eta]$,
      $(u - u_0)f(u) \leq (u - u_0)^2 f'(u_0)/2$.

1. On considère d'abord le cas où M a deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2. Soient U_1 un vecteur propre de M associé à λ_1 et U_2 un vecteur propre de M associé à λ_2. On considère la matrice $P = (U_1|U_2)$.

   (a) Montrer que P est inversible et que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

   (b) On pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$ où $X(t)$ est solution du système (3.7) avec condition initiale $X(0)$ donnée. Montrer que $Y(t)$ est solution d'un système d'équations différentielles que l'on précisera et calculer $Y(t)$.

   (c) Montrer que
   $\left(\forall Y(0) \in \mathbb{R}^2,\ \lim\limits_{t\to+\infty} ||Y(t)|| = 0\right) \iff (\lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_2 < 0) \iff$
   $\left(\forall X(0) \in \mathbb{R}^2,\ \lim\limits_{t\to+\infty} ||X(t)|| = 0\right)$,
   où $X(t)$ et $Y(t)$ sont définis à la question précédente.

2. On considère ensuite le cas où M a une seule valeur propre λ_1, réelle, et de multiplicité 2. Soit U_1 un vecteur propre de M associé à λ_1.

   (a) Montrer qu'on peut construire une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, inversible, telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ avec $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'alors on a forcément $c = \lambda_1$ (on montrera que c est valeur propre de M).

   (b) Déduire de la question précédente que
   $\left(\forall X(0) \in \mathbb{R}^2,\ \lim\limits_{t\to+\infty} \|X(t)\| = 0\right) \iff \lambda_1 < 0$.

3. On considère enfin le cas où M a deux valeurs propres complexes conjuguées $a + ib$ et $a - ib$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit U un vecteur propre de M associé à $a + ib$. U est un vecteur de $\mathbb{C}^2$: $U = U_1 + iU_2$ où $U_1 \in \mathbb{R}^2$ et $U_2 \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Montrer que U_1 et U_2 sont linéairement indépendants.

   (b) On pose $P = (U_1|U_2)$. Montrer que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

   (c) On pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$ où $X(t)$ est solution du système (3.7) avec condition initiale $X(0)$ donnée. Soient $r(t)$ et $\theta(t)$ les coordonnées polaires de $Y(t)$:
   $Y(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos(\theta(t)) \\ r(t)\sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$.
   En calculant $r^2(t)$ et $\tan(\theta(t))$ en fonction des coordonnées de $Y(t)$, montrer que $\frac{dr}{dt}(t) = a\ r(t)$ et $\frac{d\theta}{dt}(t) = -b$.
   En déduire que $\left(\forall X(0) \in \mathbb{R}^2,\ \lim\limits_{t\to+\infty} ||Y(t)|| = 0\right) \iff a < 0$.