EPREUVE ECRITE DE MATHEMATIQUES

ENS : PARIS – LYON – CACHAN

Durée : 4 heures ***Coefficients*** **Paris : option biologie 16 / option géologie 16**
Lyon : option biologie 4 / option géologie 4
Cachan 4

MEMBRE DE JURY : W. APPEL

Cette épreuve portait sur la notion d'entropie d'une probabilité et sur son utilisation dans la modélisation de choix individuels par une loi de maximalisation.

Dans les deux premières parties, quelques résultats classiques étaient redémontrés, en alternance avec des questions plus originales. La grande majorité des candidats s'est jetée sur ces questions classiques sans vraiment aborder les autres. Les rares candidats ayant fait preuve de davantage d'initiative ont été, cela va sans dire, très largement récompensés.

Si dans l'ensemble le cours semble bien compris et assimilé (ce dont on ne peut que féliciter les candidats), en revanche on ne peut que déplorer la fréquence élevée d'erreurs fondamentales comme :

- dériver des inégalités ;
- ne pas vérifier que la somme des μ_i vaut 1 : ainsi beaucoup de candidats ne se sentent pas gênés pour parler d'une probabilité $\mu = (0, \dots, 0)$;
- la dérivation de x^β *par rapport à* β a hélas plus souvent donné $\beta\, x^{\beta-1}$ que $(\ln x)\, x^\beta$.
- résoudre l'équation « $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = x$ » ne veut pas dire identifier les deux termes et conclure que $a_1 = 1$ et tous les autres a_k sont nuls !

Par ailleurs, et c'est extrêmement regrettable en filière BCPST, un candidat sur vingt seulement a essayé de faire des dessins, alors même que l'énoncé le conseillait vivement ! Or la résolution des préliminaires de la partie B n'était pratiquement possible qu'avec des dessins... et de nombreux résultats dépendaient de cette partie.

Enfin, on regrettera le manque d'initiative des candidats et la (relative) uniformité des copies : presque tous les candidats ont abordé (avec plus ou moins de bonheur) le même ensemble de questions, et les parties les plus originales n'ont quasiment pas été abordées.

Partie A

La première moitié de cette partie a globalement été bien traitée. Les résultats, plus ou moins classiques, d'analyse, ont été bien compris.

(On regrettera qu'une question du genre « Que dire d'une stratégie d'entropie nulle ? » donne lieu à des digressions parfois délirantes mêlant de vagues souvenirs de thermodynamique mal assimilés à des pseudo-démonstrations, au lieu d'un raisonnement et d'un calcul rigoureux.)

Les ennuis ont commencé avec la majoration de la puissance d'une stratégie.[1] ***Il est pourtant à noter que le résultat de la question 5, crucial pour pouvoir traiter une bonne partie du problème, était donné dans la suite de l'énoncé*** (question 1 de la partie C), pour éviter de pénaliser trop lourdement ceux qui seraient restés bloqués. Malgré cela, bon nombre de candidats n'ont pas pu obtenir que $\hat{\mu}$ était proportionnel à ϕ ; parmi ceux qui l'ont obtenu, un grand nombre n'a pas su conclure que $\hat{\mu} = \frac{1}{Z}\phi$: la question de la normalisation d'une probabilité ne semble pas être cruciale...

Dans la question 6, il semblerait que les calculs demandés (les premiers étant faciles, les derniers franchement plus difficiles) aient rebuté l'écrasante majorité des candidats.

[1] La notion de majoration elle-même ne semble pas bien maîtrisée par de nombreux candidats. Le terme « stratégie d'entropie maximale » n'a pas toujours été mathématiquement bien compris.

La dérivation par rapport à β a notamment donné lieu à des interprétations étranges, en particulier par des formules toutes faites du genre « $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\beta} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}$ », et ce bien que la variable μ soit un n-uplet $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)$ de coordonnées (liées entre elles par une relation linéaire pour compliquer l'affaire). Quel sens donner à cette formule ? Mystère...

Et d'une manière générale, dériver une somme de produits faisant intervenir des logarithmes semble au-dessus des forces du candidat moyen...

Le traitement de la question 6g (limite $\beta \to +\infty$) a été très décevant. Ceux qui ont, comme il était recommandé, traité un cas simple à deux choix, ont en général très bien vu le phénomène mis en action et ont pu aborder le cas général sereinement.

La question 7, indépendante du reste, a été généralement assez bien traitée pour la partie calculatoire ; les justifications théoriques restent parfois mal maîtrisées.

Partie B

Préliminaires Ces courtes questions ne demandaient pas de raisonnement technique difficile, mais un simple bon sens mathématique. Il paraît alors affolant de voir comment elles ont été mal traitées (voir maltraitées !) dans une grande majorité de copies : on insistera notamment sur la regrettable absence de dessins déjà évoquée et sur l'absence de bon sens (une somme de fonctions croissante est croissante...)

Partie I Les premières questions étaient essentiellement de cours ; elles ont été extrêmement bien traitées. La question 4 a été correctement résolue par une partie des candidats, même si elle a donné lieu à des calculs parfois saugrenus.

Partie II La plupart des candidats a pu obtenir $\mathrm{G}_{Z_2} = \mathrm{G} \circ \mathrm{G}_1 = \mathrm{G} \circ \mathrm{G}$. Assez peu ont pu généraliser le raisonnement pour obtenir $\mathrm{G}_{Z_n} = \mathrm{G} \circ \mathrm{G}_{Z_n} = \mathrm{G} \circ \mathrm{G} \circ \cdots \circ \mathrm{G}$.

La question 4 a été en général bâclée, les calculs de probabilité étaient rarement justifiés (et faux la plupart du temps).

Enfin, la question 6 mérite des commentaires ; il semblerait que, dans l'esprit des candidats, une population dont l'espérance croît vers $+\infty$ avec le temps ne soit pas compatible avec une probabilité non nulle d'extinction. À tel point que certains, ayant correctement prouvé que la suite $(\alpha_n)_n$ est croissante, et trouvant $\alpha_1 > 0$, n'hésitent pas à « montrer » que $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$...

Parties C et D

Ces parties n'ont été abordés que par de très rares candidats. Ceux qui s'y sont aventurés ont bien sûr été récompensés.

Dans la partie C, les résultats obtenus précédemment (notamment dans la partie B et dans la question 6 de la partie A) ont été utilisés pour modéliser le comportement d'une population mutante et, notamment, sa vitesse d'accroissement et sa probabilité d'extinction comparées à celles d'une population sauvage.

La dernière partie permettait d'appliquer des méthodes issues de la thermodynamique statistique à une étude de population, en faisant apparaître une brisure spontanée de symétrie pour une valeur critique de l'exposant β. L'énoncé, déroutant, n'a pas retenu l'attention des candidats.