
ÉPREUVE ÉCRITE de MATHÉMATIQUES 2010

ENS : PARIS - LYON - CACHAN

Durée : 4 heures

Coefficients/Total général : Paris 16/145 ; Lyon 4/58,5 ; Cachan 4/65

MEMBRES du JURY : Nicolas CHAMPAGNAT, Stéphane GÉNIEYS

L'épreuve 2010 portait sur les *structures de Turing*, qui sont des formes émergeant dans les systèmes de réaction-diffusion, et qui sont utilisées en morphogénèse (étude du développement de formes dans les organismes). Le sujet comportait quatre parties. Il introduisait et faisait manipuler la notion de fonctions propres de l'opérateur de la diffusion (partie 1), puis consistait essentiellement à considérer un équilibre « sans forme » d'une équation aux dérivées partielles de réaction-diffusion, et à tester sa stabilité par rapport à chacune de ces fonctions propres. On devait pour cela étudier la limite en temps grand de la solution d'une équation différentielle (partie 2), puis d'un système de deux équations différentielles linéaires d'ordre un (partie 4). Le comportement des solutions de ce système linéaire était relié aux propriétés spectrales de la matrice de ses coefficients (partie 3).

La note la plus basse est 2,63 et la plus haute est 20. La moyenne est de 8,90 et l'écart-type de 3,58.

De façon générale, peu de candidats sont allés au-delà des questions les plus faciles dans chaque partie, et très peu de copies montrent une compréhension globale de l'articulation entre les différentes parties.

Dans la partie 1, la notion de fonction propre est bien passée, ainsi que la résolution de l'équation lorsque la condition initiale est une de ces fonctions propres. Par contre, la généralisation au cas où la condition initiale est une combinaison linéaire de fonctions propres a été peu traitée, alors qu'elle ne fait qu'utiliser la linéarité de l'équation. De même très peu de candidats ont pu montrer l'unicité de la solution, ne pensant pas qu'une quantité positive, décroissante au cours du temps, et initialement nulle est forcément nulle pour tout temps.

Dans la partie 2, l'étude de stabilité linéaire a été traitée correctement par la plupart des candidats, ainsi que certaines questions intermédiaires de l'étude de stabilité non-linéaire, mais le changement de variable dans une équation différentielle, qui permettait de conclure cette étude de stabilité non-linéaire, semble avoir posé problème à une vaste majorité des candidats. Concernant la stabilité non-linéaire lorsque le coefficient de diffusion d est non nul, pratiquement aucun candidat n'a su la relier avec le fait qu'une fonction régulière a une dérivée première nulle et une dérivée seconde négative ou nulle en un point de maximum.

La partie 3 est celle qui a été le mieux traitée. La diagonalisation d'une matrice carrée ayant des valeurs propres réelles distinctes a en général été correctement énoncée. Par contre, un nombre trop important de candidats ne semblait pas connaître les difficultés apparaissant en cas de valeurs propres multiples. Le cas des valeurs propres complexes conjuguées, moins proche des formulations vues en cours, a permis de distinguer les candidats, minoritaires, comprenant les formules de changement de base.

La partie 4 n'a pratiquement pas été traitée, à l'exception de la première question sur la linéarisation du système. Le sujet était pourtant relativement court cette année. Les très rares candidats qui ont abordé la fin de la partie s'en sont trouvés très nettement distingués. Cette partie consistait à généraliser les résultats de la partie 2, en utilisant les résultats de la partie 3. On ne peut que persister à encourager les candidats à lire le sujet dans son intégralité et à s'efforcer de distinguer les liens entre ses différentes parties.