Banque Inter-ENS BCPST - SESSION 2012

Épreuve écrite de mathématiques

ENS : CACHAN, LYON, PARIS

Coefficients :
CACHAN : 4 (pour un total de 63)
LYON : 4 (pour un total de 58,5)
PARIS : 16 (pour un total de 142)

Membres du jury : Grégoire NADIN

Ce sujet portait sur des modèles de dynamique des populations de type proies-prédateurs. Différents aspects du programme étaient abordés : analyse réelle et équations différentielles (parties 1 et 2), polynômes (partie 3) et analyse linéaire (partie 4). Les 4 parties étaient relativement indépendantes et de difficultés équivalentes, à l'exception de la partie 2, plus difficile et dans le prolongement de la partie 1. Par ailleurs, la compréhension par les candidats des différents modèles biologiques étudiés, des hypothèses sous-jacentes et de la pertinence des résultats obtenus était évaluée tout le long du problème.
Suite à des retours émanant des classes préparatoires, ce sujet était volontairement plus simple que les épreuves des années précédentes. Les candidats ont donc globalement abordé l'ensemble des parties, à l'exception de la fin des 2e et 4e parties. Les notes vont de 1,83 à 20, avec une moyenne de 9,67 et un écart type de 3,50.
La première partie traitait de l'équation de Lotka-Volterra classique *via* sa propriété de conservation de l'énergie. Cette partie a été globalement bien traitée, la plupart des candidats décrochant progressivement à la question 7 (pour reprendre à la question 12) et les questions 8 à 10 servant à classer les bons candidats. La question 7 a permis de constater que les notions de limites sont mal connues de la plupart des candidats. Un trop grand nombre pense par exemple qu'une fonction convergente a une dérivée convergeant vers 0 ou, pire, qu'une fonction bornée converge. Il serait bon que quelques contre-exemples soient mémorisés pour éviter ces erreurs grossières. De même, la logique basique est mal maîtrisée, ce qui donne parfois lieu à des raisonnements par analyse-synthèse fantaisistes (comme à la question 6 par exemple). Cela se vérifie également sur la question 8, où peu de candidats ont compris que la question 7 constituait un raisonnement par l'absurde et que les hypothèses de monotonie sur u ou v étaient donc à exclure.
La fin de la première partie demandait aux candidats d'utiliser le modèle pour répondre à la question qui a motivé son introduction par Volterra. Trop peu de candidats ont réussi à dégager l'ensemble des éléments essentiels de ce modèle à la question 13 : l'isolement des deux populations et la forme particulière des différents coefficients. A l'inverse, la positivité ou la continuité des densités ne constituent pas des hypothèses biologiques très fortes, au contraire. De même, très peu de candidats ont utilisé l'étude du modèle pour répondre aux questions 14 et 15. La plupart s'en sont tenus à des considérations qualitatives superficielles sur l'équation, or l'utilité des modèles mathématiques est de déduire d'hypothèses basiques des mécanismes plus complexes observés dans la nature.
La deuxième partie ajoutait un terme de compétition intra-spécifique dans l'équation, ce qui a pour conséquence de changer le comportement périodique de l'équation de Lotka-Volterra en une convergence vers un équilibre. Ce résultat était prouvé en utilisant la décroissance de l'énergie associée à l'équation et des méthodes d'analyse réelle. Les questions 17 et 18 relevaient du cours de terminale et il est décevant que des candidats y perdent des points. Ainsi, un tiers des candidats

ayant abordé la question 18 ne tracent pas un graphe correct, et cela malgré le fait que la dérivée de la fonction soit calculée à la question précédente et qu'une interprétation biologique du graphe soit demandée à la question suivante. Les questions 20 à 24 étaient l'analogue des questions 3 à 6 mais peu de candidats ont fait le lien. Cela s'est vérifié en particulier sur la question 21, exact analogue de la question 3 mais sans indication. La question 24 montrait la convergence de u en supposant l'existence d'une valeur d'adhérence pour u (cette notion n'est pas au programme et aucune propriété n'était exigée). Là encore, seule une poignée de candidats ont envisagé que u puisse ne pas converger à l'infini et beaucoup ont supposé d'emblée que $u\_\infty=u^*$, ne comprenant du coup plus le sens des questions. La nature abstraite de la méthode ne les a sans doute pas aidé. Pour autant, il serait bon là-aussi que les candidats aient en tête des exemples de fonctions admettant des valeurs d'adhérence mais ne convergeant pas (comme le sinus). La question 25 faisait appel au théorème des accroissements finis et à des calculs rigoureux et n'a été abordée que par une poignée de candidats, souvent avec peu de succès. Force est de constater que la difficulté de ces questions n'était donc pas adaptée.
La troisième partie était la plus proche du cours. Elle a été abordé par beaucoup de candidats mais, là-aussi, cela a été l'occasion pour certains de montrer que le cours n'était pas maîtrisé voire même pas connu. Ainsi, les questions 28, 30 et 32 relevaient du cours de terminale mais ont parfois donné lieu à des réponses tout à fait farfelues. Il est ainsi surprenant de voir tracés des tableaux de variations dans C par une bonne quinzaine de candidats. La question 29 comportait une erreur (il fallait lire $\mu<0$), heureusement sans conséquence sur la suite du sujet.39% de candidats ayant traité cette question ont vu l'erreur. Les autres ne se sont souvent même pas posé la question du signe de \mu. Enfin, il est surprenant de constater que seuls deux candidats ont pensé à exclure à la question 31 le cas où λ est une racine multiple.
La quatrième partie introduisait un « super-prédateur » dans l'équation et considérait uniquement la stabilité de l'équilibre non-trivial par l'étude de l'équation linéarisée au voisinage de cette équilibre. L'existence d'un polynôme caractéristique était démontrée « à la main » et ses racines étaient étudiées grâce à la 3e partie. Les questions 34 à 37 ont été bien traitées. Quelques candidats ont abordé les questions 38, 41 et 43. Aucun n'a réellement utilisé les résultats de la partie 3, ce qui aurait nécessité de distinguer les différents cas selon le nombre de racines de P et leur simplicité. Par ailleurs, rappelons ici que la propriété fondamentale à invoquer pour diagonaliser M à la question 41 étaient la distinction entre les trois valeurs propres.