Jeux combinatoires

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juillet 2008

ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.

Sur votre table est indiqué un numéro u_0 qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un $\widetilde{u_0}$ particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion!). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec $\widetilde{u_0}$ au lieu de u_0. Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre u_0) sur la seconde et vous la remettrez à l'examinateur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe***. Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

1 Introduction

La théorie des jeux est une discipline très sérieuse. Elle trouve des applications dans des domaines aussi variés que l'économie, la théorie des nombres et l'informatique. En informatique, elle sert à analyser des systèmes devant interagir avec un environnement dont on ne connaît pas le comportement de manière exacte, par exemple un utilisateur éventuellement mal intentionné. On a alors affaire à des jeux combinatoires sur des objets tels que des arbres ou des graphes.
Ce sujet aborde deux jeux de natures très différentes. Le premier, en partie 3 est sur des arbres binaires complets, alors que la partie 4 aborde un jeu de nombres, d'abord dans le cas simple de la dimension un, puis en dimension supérieure. Ces deux parties sont indépendantes.

2 Permutation pseudo-aléatoire

Considérons la suite entière (u_n) définie pour $n \geq 0$ par :

$$u_n = \begin{cases} \textit{votre } \mathtt{u_0} \textit{ (à reporter sur votre fiche)} & \text{si } n = 0 \\ 15\,731 \times u_{n-1} \mod 32\,003 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

On aura intérêt à mémoriser dans un tableau les termes de la suite (u_n) pour les n allant de 0 à 32 000.

Question 1 *Quelle sont les valeurs de* ***a)*** $u_{1\,000}$, ***b)*** $u_{10\,000}$ *et* ***c)*** $u_{30\,000}$ *?*

La suite (u_n) va maintenant être utilisée pour définir une permutation $p_{k,n}$ sur $\bar{k} = \{0, \ldots, k-1\}$.
Soit $tr_{k,i} : \bar{k} \to \bar{k}$ la transposition intervertissant les éléments d'indices $u_{2i-1} \mod k$ et $u_{2i} \mod k$. La permutation $p_{k,n}$ est définie par itération des transpositions $tr_{k,i}$:

$$p_{k,n} \ = \ tr_{k,n} \circ tr_{k,n-1} \circ \ldots \circ tr_{k,1}$$

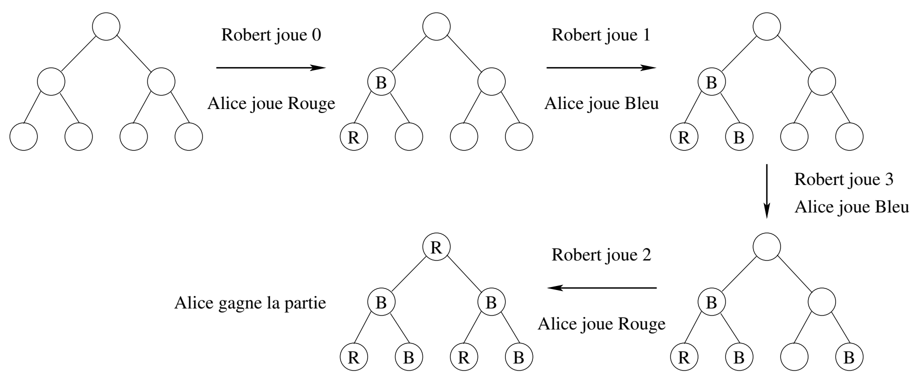
Question 2 *Quelles sont les valeurs de* ***a)*** $p_{100,500}(50)$, ***b)*** $p_{1\,000,5\,000}(500)$ *et* ***c)*** $p_{3\,000,15\,000}(1\,500)$ *?*

3 Jeu des couleurs sur un arbre

Il s'agit d'un jeu qui se joue sur un arbre binaire complet de hauteur $h \geq 1$. Cet arbre H est constitué de $2^{h+1} - 1$ sommets désignés par des mots binaires de longueur au plus h formés des symboles 0 et 1. La racine est le mot vide ϵ. Pour tout sommet u, avec longueur$(u) < h$, son fils gauche est le sommet $u.0$ et son fils droit est le sommet $u.1$. Les feuilles sont les 2^h sommets désignés par les mots binaires de longueur exactement h.
Le jeu se joue en attribuant des couleurs, rouge ou bleu, aux feuilles de H. La couleur d'un sommet interne de H est fonction des couleurs de ses deux fils, comme défini par la table suivante :

	vierge	rouge	bleu
vierge	vierge	bleu	vierge
rouge	bleu	bleu	bleu
bleu	vierge	bleu	rouge

Le jeu se joue avec deux joueurs, Robert et Alice. Au début de la partie, toutes les feuilles de H sont vierges. Robert commence à jouer le premier. Il doit choisir une feuille u de H. Alice doit alors attribuer à cette feuille une couleur, bleu ou rouge. Robert peut jouer à nouveau, en choisissant une autre feuille encore vierge, à laquelle Alice attribuera une couleur, et ainsi de suite.
La partie s'arrête quand l'un des deux joueurs a gagné. Alice gagne quand une couleur a été attribuée à toutes les feuilles de H. Robert gagne quand la racine est colorée, c'est-à-dire qu'elle n'est pas vierge, alors qu'il reste au moins une feuille vierge.
Un exemple de partie pour $h = 2$ est donné ci-dessous.



Pour bien comprendre le principe du jeu, supposons que Robert et Alice jouent aléatoirement sur un arbre de hauteur h. La feuille choisie par Robert au tour i, $0 \le i < 2^h$ est la feuille numéro $p_{2^h,5\cdot 2^h}(i)$, en numérotant les feuilles de gauche à droite. La couleur choisie par Alice est définie à l'aide de la suite (u_n) : au tour i, Alice joue rouge si $u_{10\cdot 2^h+i+1}$ est pair et bleu sinon.

Question 3 *Déterminer qui est le gagnant et le numéro du dernier tour joué pour les valeurs de h suivantes :* ***a)*** $h = 4$, ***b)*** $h = 6$, ***c)*** $h = 8$, ***d)*** $h = 10$.

Supposons maintenant qu'Alice joue de façon optimale. En jouant plusieurs parties avec Alice, Robert s'aperçoit qu'il perd à chaque fois. Il se demande si le jeu n'est pas déterminé pour Alice, c'est-à-dire qu'il existe une stratégie faisant gagner Alice à tout coup.
Robert a raison. Aidez-le à comprendre comment Alice s'y prend pour gagner. Vous allez écrire un programme qui va calculer les coups d'Alice, en réponse aux coups de Robert, définis par la permutation $p_{2^h,5\cdot 2^h}$. On supposera qu'Alice ne joue bleu que quand cela est absolument nécessaire, c'est-à-dire que jouer rouge permettrait à Robert de gagner inévitablement. Dans les autres cas, Alice joue toujours la couleur rouge.
On remarquera qu'en appliquant cette stratégie, toute configuration accessible comporte des sous-arbres complètement colorés et de racines bleues. Tout sommet coloré appartient à un de ces sous-arbres.

Question 4 *Donner les coups d'Alice pour les h derniers tours, avec :* **a)** $h = 4$, **b)** $h = 6$, **c)** $h = 8$ **d)** $h = 10$. *On donnera également le nombre de fois où Alice a joué rouge deux fois de suite.*

Question à développer pendant l'oral : Expliquer la stratégie gagnante d'Alice. Détailler l'algorithme mis en œuvre ainsi que la structure de données employée. Indiquer sa complexité en temps.

4 Jeux des nombres carrés

4.1 Jeu simple

Le jeu des nombres carrés se joue à deux joueurs, Alice et Robert. La configuration initiale du jeu est un entier naturel v_0. Robert joue en premier. Il doit choisir un carré non nul, c_0 inférieur ou égal à v_0. La configuration atteinte est $v_1 = v_0 - c_0$. Alice peut maintenant jouer en choisissant un carré non nul $c_1 \leq v_1$. La nouvelle configuration est $v_2 = v_1 - c_1$, et ainsi de suite. Quand la configuration courante v_i est nulle, le joueur devant jouer a perdu. Pour chacun des joueurs, l'objectif est donc de forcer l'adversaire à devoir jouer dans la configuration nulle.
Par exemple, considérons le jeu commençant à 40. Robert peut jouer 1, 4, 9, 16, 25 ou 36. Il choisit 25. La nouvelle configuration est 15. Alice peut maintenant jouer 1, 4 ou 9. Elle choisit 4. La configuration est maintenant 11. Robert a le choix entre 1, 4 ou 9. Il choisit 9. Dans la configuration 2, Alice ne peut jouer que 1. Robert peut maintenant jouer 1 à son tour. Alice a perdu.
En analysant la partie, et en supposant que Robert joue de manière optimale, on s'aperçoit qu'Alice ne peut gagner. Ce n'est pas le cas de tous les nombres initiaux. En commençant le jeu à 15, Robert n'a pas de stratégie gagnante.
Il est aisé de montrer que chaque position est soit gagnante soit perdante pour le joueur ayant la main. De plus il existe une stratégie positionnelle, c'est-à-dire dont les coups sont uniquement fonction de la position.
On s'intéressera dans un premier temps à la stratégie maximale consistant à jouer, dans les positions gagnantes, le plus grand carré assurant la victoire. Pour les positions perdantes, on choisira de jouer 1.

Question 5 *Déterminer si u_n est une position gagnante ou perdante, la valeur du coup à jouer dans cette position, et le nombre de coups restant à jouer, en supposant que les deux joueurs appliquent la stratégie maximale. On prendra* **a)** $n = 100$, **b)** $n = 200$, **c)** $n = 300$, **d)** $n = 400$ *et* **e)** $n = 500$.

On peut s'intéresser à des stratégies optimisant des fonctions de coût, par exemple le nombre de coups restant à jouer. Ainsi le joueur dans une position gagnante cherchera à minimiser le nombre de coups restant à jouer, alors que le joueur sur une position perdante cherchera à maximiser ce nombre de coups. Entre plusieurs coups assurant la terminaison dans le même nombre de coups, on prendra celui qui est le plus grand, quand on est dans une position gagnante, et le plus petit autrement.

Question 6 *En supposant l'optimalité des stratégies des deux joueurs, déterminer le nombre de coups restant, et le coup à jouer, pour les positions suivantes :* ***a)*** u_{100}, ***b)*** u_{200}, ***c)*** u_{300}, ***d)*** u_{400} *et* ***e)*** u_{500}.

Question à développer pendant l'oral : Détailler l'algorithme utilisé pour calculer les stratégies maximales et optimales. Quelle est sa complexité en temps ?

4.2 Jeu de dimension supérieure

Le jeu des nombres carrés peut être généralisé à la dimension n en prenant comme positions des vecteurs d'entiers naturels $\vec{v}$ de dimension n. Un coup consiste alors à choisir une composante, $i \in \{0 \dots n-1\}$ et un carré c non nul et inférieur ou égal à $\vec{1}_i \cdot \vec{v}$, où $\vec{1}_i$ est le vecteur unité selon la composante i. La position atteinte est le vecteur $\vec{v}' = \vec{v} - c \cdot \vec{1}_i$. Robert joue en premier et nos deux joueurs, Alice et Robert jouent à tour de rôle. Un joueur qui ne peut jouer a perdu. On prendra comme positions initiales les vecteurs $\vec{u}_{n,m,k} = (u_m \mod k, u_{m+1} \mod k, \dots, u_{m+n-1} \mod k)$.
Comme pour le jeu de dimension 1, on peut définir une stratégie optimale : le joueur dans une position gagnante cherchera à minimiser le nombre de coups restant à jouer, alors que le joueur sur une position perdante cherchera à le maximiser. Entre plusieurs coups assurant la terminaison dans le même nombre de coups, on prendra celui ayant le plus grand c quand on est dans une position gagnante, et le plus petit c autrement. En cas d'égalité des carrés, on prendra toujours le coup ayant le plus petit i.
Vous programmerez le calcul de la stratégie optimale pour la dimension $n = 2$.

Question 7 *Déterminer si les positions suivantes sont gagnantes ou perdantes :* ***a)*** $\vec{u}_{2,100,30}$, ***b)*** $\vec{u}_{2,200,100}$, ***c)*** $\vec{u}_{2,300,300}$ *et* ***d)*** $\vec{u}_{2,400,1000}$. *On déterminera également le nombre de coups restant à jouer, et le coup à jouer (composante i, carré c) pour ces positions.*

Question à développer pendant l'oral : Détailler l'algorithme utilisé pour calculer la stratégie optimale. Quelle est sa complexité en temps et en mémoire ?

◇
◇ ◇
◇

Fiche réponse type: Jeux combinatoires

$\widetilde{u_0}$: 1

Question 1

a) 11391

b) 27932

c) 2701

Question 2

a) 4

b) 272

c) 2723

Question 3

a) Robert, tour 13

b) Robert, tour 59

c) Robert, tour 239

d) Robert, tour 841

Question 4

a) BBRR 2

b) BRBRBR 6

c) RRBRRBRR 34

d) BBBRRRBRRR 122

Question 5

a) Gagnante, 11025, 15

b) Gagnante, 11025, 7

c) Gagnante, 19600, 5

d) Gagnante, 16900, 7

e) Gagnante, 7569, 9

Question 6

a) 6241, 51

b) 11025, 27

c) 19600, 43

d) 16900, 19

e) 7569, 13

Question 7

a) Gagnante, 1, 16, 9

b) Gagnante, 1, 36, 15

c) Gagnante, 1, 289, 17

d) Perdante, 1, 9, 34

Fiche réponse: Jeux combinatoires

Nom, prénom, u_0: ....

Question 1

a)

b)

c)

Question 2

a)

b)

c)

Question 3

a)

b)

c)

d)

Question 4

a)

b)

c)

d)

Question 5

a)

b)

c)

d)

e)

Question 6

a)

b)

c)

d)

e)

Question 7

a)

b)

c)

d)