ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2012 FILIÈRE MP – CONCOURS INFO

COMPOSITION D'INFORMATIQUE–MATHÉMATIQUES – (ULC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le présent sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9.

Autour des séries formelles

Une *série formelle* à coefficients dans $\mathbb{R}$ est une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$. L'ensemble des séries formelles est noté $\mathbb{R}[[X]]$. Les opérations usuelles d'addition (terme à terme) et de multiplication par un scalaire (terme à terme) sur les suites font naturellement de $\mathbb{R}[[X]]$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

La suite (s_n), considérée comme série formelle, est également notée $\sum_n s_n X^n$. La légitimité de cette notation sommatoire sera explorée plus tard ; pour l'instant, elle ne doit pas s'interpréter comme provenant d'une notion de série classique. Ainsi, la série formelle $\sum_n n! X^n$ est un élément de $\mathbb{R}[[X]]$, bien que la série entière correspondante ait un rayon de convergence nul. En particulier, en dehors de la dernière partie du problème, toute considération de rayon de convergence est exclue.

On définit sur $\mathbb{R}[[X]]$ une opération de multiplication de deux séries formelles de la manière suivante : si $S = \sum_n s_n X^n$ et $T = \sum_n t_n X^n$, alors $S.T = U = \sum_n u_n X^n$, avec

$$u_n = \sum_{j=0}^{n} s_j t_{n-j}.$$

Quelques notations

Lorsqu'une série formelle S est définie, s_n désigne implicitement son “coefficient de degré n”, *i.e.* $S = \sum_n u_n X^n$. Deux séries formelles S et T sont égales si et seulement si on a, pour tout $n \geq 0$, $s_n = t_n$.

On note X_F la série formelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_1 = 1$, $u_i = 0$ pour $i \neq 1$; 1_F la série formelle $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_0 = 1$, $v_i = 0$ pour $i \neq 0$; et 0_F la série formelle dont tous les termes sont nuls. On admettra que le produit de séries formelles est commutatif et associatif, et admet 1_F comme élément neutre et 0_F comme élément absorbant.

Lorsque E est un ensemble fini, on note $\#E$ le cardinal de E.

Partie 1 : Algèbre des séries formelles

Question 1.1. Quelle est la suite associée à la série formelle $(X_F)^n$?

Question 1.2. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[[X]]$ telle que, pour tout $n \geq 0$, $f(X^n) = (X_F)^n$, et qu'il s'agit d'un morphisme injectif d'algèbres.

Dans la suite, on identifiera un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ à son image $f(P) \in \mathbb{R}[[X]]$, et on pourra considérer que $\mathbb{R}[X]$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}[[X]]$. On se gardera toutefois d'utiliser la notation $S(a)$ lorsque a est un réel et que S est une série formelle qui n'est pas un polynôme.

Pour une série formelle $S = \sum_n s_n X^n$ non identiquement nulle, la *valuation* de S est définie par $\nu(S) = \min\{i : s_i \neq 0\}$. Pour deux séries formelles S et T, on définit

$$d(S,T) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } S = T, \\ 1/\nu(S-T) & \text{si } S \neq T. \end{array} \right.$$

Question 1.3.

(a). Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{R}[[X]]$.

(b). Montrer que d n'est pas une distance provenant d'une norme sur $\mathbb{R}[[X]]$.

Question 1.4. Soient S et T deux séries formelles. Montrer que $S.T = 0_F$ si et seulement si $S = 0_F$ ou $T = 0_F$.

Soit $U \in \mathbb{R}[[X]]$, et $U^{(n)}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}[[X]]$. On dit que la suite $(U^{(n)})$ converge vers U au sens des séries formelles, si $\lim_{n\to\infty} d(U^{(n)}, U) = 0$.

On définit également la convergence d'une série de séries formelles, de la manière suivante : si $(V^{(n)})$ est une suite d'éléments de $R[[X]]$, on dira que la série $\sum_n V^{(n)}$ converge, avec comme somme U, si la suite $U^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} V^{(k)}$ converge vers U.

Question 1.5.

(a). Montrer que la suite de polynômes définie par $P_n(X) = 1 + (1/n)X$ ne converge pas au sens des séries formelles. Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle elle converge ?

(b). Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(U^{(n)})$ de séries formelles converge vers une série formelle U est que, pour tout $k \geq 0$, la suite $(u_k^{(n)})_{n\geq 0}$ soit ultimement constante et égale à u_k.

(c). Montrer qu'une suite de séries formelles $(U^{(n)})$ converge au sens des séries formelles si et seulement si la suite $(U^{(n+1)} - U^{(n)})$ converge vers la série 0_F.

Question 1.6. Montrer que toute série formelle $\sum u_n X^n$ est la somme de la série de séries formelles $\sum_n S_n$, où $S_n = u_n (X_F)^n$.

Question 1.7. On définit sur $\mathbb{R}[[X]]$ une relation binaire $\leq_F$ de la manière suivante : $\sum_n u_n X^n \leq_F \sum_n v_n X^n$ si et seulement si, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \leq v_n$. Montrer que $\leq_F$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}[[X]]$.

Partie 2 : Équations de séries formelles

Dans cette partie, nous nous intéressons à différentes formes d'équations portant sur des séries formelles, et à donner des conditions permettant d'affirmer l'existence et l'unicité de solutions.

Si Φ est une fonction de $\mathbb{R}[[X]]$ dans lui-même, une série formelle S est une *solution de l'équation* $\Phi(S) = 0_F$ si l'image de S par Φ est la série nulle. De même, une série formelle est une *solution de l'équation* $\Phi(S) = S$ si S est sa propre image par Φ (S est un point fixe de Φ).

Question 2.1. Soit S une série formelle non identiquement nulle, et $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une série formelle T telle que l'on ait $S = (X_F)^k.T$, si et seulement si $\nu(S) \geq k$.

Question 2.2. La série formelle T est un *inverse* (multiplicatif) de la série formelle S, si l'on a $S.T = 1_F$.

(a). En supposant connus les coefficients de S, écrire de manière générique les équations sur les coefficients de T qui caractérisent le fait que T soit un inverse de S.

(b). Montrer qu'une série $S = \sum_{n\geq 0} s_n X^n$ admet un inverse si et seulement si $s_0 \neq 0$, et que cet inverse est alors unique.

(c). Soit $S = \sum_n n!X^n$, et soit $T = \sum_n t_n X^n$ l'inverse de S. Calculer t_0, t_1, t_2 et t_3.

Question 2.3. Soient P et Q deux polynômes, Q non identiquement nul.

(a). Montrer qu'il existe au plus une série formelle S telle que $P - Q.S = 0_F$.

(b). Montrer que, si $Q(0) \neq 0$, alors il existe une série formelle S telle que $P - Q.S = 0_F$.

(c). Donner une condition nécessaire et suffisante sur P et Q pour qu'une telle série formelle existe (sans nécessairement supposer $Q(0) \neq 0$).

Une série formelle solution d'une équation de la forme $P - Q.S = 0_F$, où P et $Q \neq 0$ sont des polynômes, est appelée *série rationnelle.*

Question 2.4. Soit $(s_n)_{n\geq 0}$ une suite satisfaisant, pour tout $n \geq 2$, $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$. Montrer que la série formelle $S = \sum_n s_n X^n$ est rationnelle.

Question 2.5. Montrer que, pour toute série rationnelle $S \neq 0_F$, il existe un unique couple (P^*, Q^*) de polynômes premiers entre eux, avec P^* unitaire, tels que S soit l'unique solution de l'équation $P^* - Q^*.S = 0_F$. Dans la suite, ces deux polynômes seront notés respectivement $\mathrm{Num}(S)$ et $\mathrm{Den}(S)$.

Question 2.6. Soit S une série rationnelle. Montrer qu'il existe un entier $k \geq 0$, un entier $n_0 \geq 0$, et des réels $a_1, \ldots, a_k$ tels que les coefficients $(s_n)_{n\geq 0}$ satisfassent, pour tout $n \geq n_0$,

$$s_n = \sum_{i=1}^{k} a_i s_{n-i}. \tag{1}$$

Question 2.7. Réciproquement, démontrer que toute série formelle qui satisfait une condition de la forme (1) est rationnelle.

Question 2.8. Soient P et Q deux polynômes non identiquement nuls, avec $Q(0) = 1$. On suppose que P et Q sont donnés par leurs degrés respectifs d_P et d_Q (considérés comme des constantes), et leurs coefficients $(p_i)_{0 \leq i \leq d_P}$ et $(q_j)_{0 \leq j \leq d_Q}$. Soit alors S la série formelle d'équation $P - Q.S = 0_F$. Montrer qu'il est possible de calculer le coefficient s_n en $O(n)$ opérations arithmétiques sur des nombres entiers.

Une fonction Φ de $\mathbb{R}[[X]]$ dans lui-même est dite *contractante* si, pour toutes séries formelles S et T telles que $S \neq T$, on a

$$d(\Phi(S), \Phi(T)) < d(S, T).$$

Question 2.9.

(a). Montrer que si Φ est contractante, alors l'équation $S = \Phi(S)$ a au plus une solution.

(b). On suppose Φ contractante. Soit $S^{(0)}$ une série formelle quelconque. On définit la suite de séries formelles $(S^{(n)})_{n \geq 0}$ par $S^{(n+1)} = \Phi(S^{(n)})$ pour $n \geq 0$. Montrer que, pour tout $n > 0$ tel que $S^{(n+1)} \neq S^{(n)}$, on a

$$\nu(S^{(n+1)} - S^{(n)}) \geq 1 + \nu(S^{(n)} - S^{(n-1)}).$$

(c). Montrer que, si Φ est contractante, alors l'équation $S = \Phi(S)$ a une solution unique.

Une équation de la forme $\Phi(S) = 0_F$ est *algébrique* s'il existe un entier $k \geq 1$ et $k + 1$ polynômes $P_0, \ldots, P_k$, non tous nuls, tels que $\Phi(S)$ s'exprime sous la forme

$$\Phi(S) = \sum_{i=0}^{k} P_i S^i.$$

Une éventuelle solution d'une équation algébrique est elle-même appelée série formelle algébrique.

Question 2.10. Soit une équation algébrique $\Phi(S) = 0_F$, pour laquelle le polynôme P_1 ne s'annule pas en 0, alors que chaque polynôme P_i pour $1 < i \leq k$ s'annule en 0. Montrer qu'une telle équation a une solution unique dans $\mathbb{R}[[X]]$.

Question 2.11. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que l'on ait $P(0) = p_0 > 0$. On s'intéresse aux solutions de l'équation $S^2 - P = 0$.

(a). Montrer qu'une condition nécessaire pour qu'une série formelle $S = \sum_n s_n X^n$ soit solution de l'équation $S^2 - P = 0$ est que s_0 appartienne à un ensemble $E = \{s, s'\}$ à déterminer.

(b). Montrer que l'équation $S^2 - P = 0$ a exactement deux solutions dans $\mathbb{R}[[X]]$.

Partie 3 : Séries génératrices de langages

Soit A un ensemble fini non vide. A^* désigne l'ensemble des suites finies d'éléments de A, suites qui sont appelées *mots* sur l'*alphabet* A. On supposera systématiquement que les suites finies non vides sont de la forme $(w_k)_{1\leq k\leq n}$, *i.e.* sont indexées à partir de 1. L'entier n est alors la *longueur* du mot, notée $|w|$. L'unique mot de longueur 0, appelé *mot vide*, est noté ε.

Afin de simplifier les notations, on note les mots en écrivant directement la séquence de leurs lettres : ainsi, le mot (a, b, b, a) (de longueur 4) se note *abba*.

Un *langage* L est une partie de A^* ; l'ensemble des langages sur l'alphabet A est noté $\mathcal{L}(A)$.

Une *occurrence* d'une lettre $a \in A$ dans un mot w est un indice $1 \leq i \leq |w|$ tel que l'on ait $w_i = a$. Le nombre d'occurrences de a dans w est noté $|w|_a$.

Si L est un langage, on note $L_n = L \cap A^n$, pour tout entier n, l'ensemble des mots de L dont la longueur est n, et $\ell_n = \#L_n$. On a donc en particulier $\ell_0 = 1$ ou $\ell_0 = 0$ selon que ϵ appartient ou non à L.

On définit la *série génératrice du langage* L comme la série formelle $S_L = \sum_n \ell_n X^n$.

Question 3.1. Soient L et L' deux langages. Montrer que, si $L \subset L'$, alors on a $S_L \leq_F S_{L'}$, et que, si de plus on a $S_L = S_{L'}$, alors $L = L'$.

Question 3.2. Soient L et L' deux langages. Montrer que $S_{L\cup L'} \leq_F S_L + S_{L'}$, et qu'il y a égalité si et seulement si les langages L et L' sont disjoints.

L'ensemble A^* est muni d'une loi de composition interne dite *produit de concaténation*, notée . et définie comme suit : si $u = (u_k)_{1\leq k\leq n}$ et $v = (v_k)_{1\leq k\leq m}$ sont deux mots de longueurs respectives n et m, $u.v$ est le mot w, de longueur $n + m$, défini par

$$w_k = \begin{cases} u_k & \text{si } 1 \leq k \leq n, \\ v_{k-n} & \text{si } n+1 \leq k \leq n+m. \end{cases}$$

On admettra que le produit de concaténation est associatif et admet ε comme élément neutre.

On définit le produit (ensembliste) de deux langages L et L' comme le langage $L.L'$ défini par : $w \in L.L'$ si et seulement s'il existe deux mots $u \in L$ et $v \in L'$ tels que l'on ait $w = u.v$. Lorsque l'un des langages est réduit à un unique mot, on s'autorise un abus de notation consistant par exemple à écrire $w.L$ pour le langage $\{w\}.L$. Cette définition s'étend à un produit de plus de deux langages : si $L_1, \ldots, L_k$ sont des langages, $L_1.L_2.\ldots.L_k$ désigne l'ensemble des mots w tels qu'il existe des mots $w_i \in L_i$ (pour $1 \leq i \leq k$) avec $w = w_1.w_2.\ldots.w_k$.

Le produit $L_1.L_2.\ldots.L_k$ est dit *non ambigu* si, pour tout mot $w \in L_1.L_2.\ldots.L_k$, le k-uplet de mots $(w_i)_{1\leq i\leq k}$ est unique.

Un mot u est un *préfixe* d'un mot w s'il existe un mot v tel que l'on ait $w = u.v$; en particulier, le mot vide ϵ est préfixe de tout mot, et tout mot est préfixe de lui-même. Un langage L est dit préfixe si, pour tout couple $(w, w') \in L^2$, w est préfixe de w' si et seulement si $w = w'$ (attention, la terminologie est un peu trompeuse : un langage préfixe est un langage qui *ne contient pas* de couples de mots distincts préfixes l'un de l'autre). À titre d'exemple, le langage fini $\{a, ab\}$ n'est pas préfixe (a est préfixe de ab), mais le langage $\{a, ba\}$ l'est.

Question 3.3. Soit L un langage préfixe, et L' un langage quelconque. Montrer que le produit $L.L'$ est non ambigu.

Question 3.4. Soient L et L' deux langages.
- Montrer que l'on a $S_{L.L'} \leq_F S_L.S_{L'}$
- Montrer que l'on a $S_{L.L'} = S_L.S_{L'}$ si et seulement si le produit de langages $L.L'$ est non ambigu.

Question 3.5. On définit un langage $F \subset \{a,b\}^*$ sur l'alphabet $A = \{a,b\}$, de la manière suivante : F est l'ensemble des mots (y compris le mot vide) qui ne contiennent pas deux occurrences consécutives de la lettre b, *i.e.* l'ensemble des mots $w = a_1 \ldots a_n$ (avec $a_i \in \{a,b\}$ pour chaque i) tels que, pour tout $1 \leq i \leq n-1$, $a_i \neq b$ ou $a_{i+1} \neq b$.

(a). Montrer que F satisfait l'identité ensembliste

$$F = \{\varepsilon, b\} \cup (\{a, ba\}.F)\,.$$

(b). Montrer que la série génératrice $S_F = \sum_n f_n X^n$ de F est une série rationnelle, et déterminer $\mathrm{Num}(S_F)$ et $\mathrm{Den}(S_F)$.

(c). Donner une relation de récurrence définissant la suite $(f_n)_{n\geq 0}$.

Question 3.6. On définit un langage D sur l'alphabet $A = \{a,b\}$ de la manière suivante : un mot w est dans D si et seulement si, d'une part, $|w|_a = |w|_b$, et d'autre part, pour tout préfixe w_1 de w, on a $|w_1|_a \geq |w_1|_b$.

(a). Soient w_1 et w_2 deux mots de D. Montrer que $a.w_1.b.w_2 \in D$.

(b). Soit w un mot non vide de D. Montrer qu'il existe deux mots w_1 et w_2 de D tels que l'on ait $w = a.w_1.b.w_2$, et que ces deux mots sont uniques.

(c). Montrer que le langage D satisfait l'identité ensembliste

$$D = \{\varepsilon\} \cup a.D.b.D$$

(d). Montrer que la série génératrice S_D satisfait l'équation

$$S_D = 1_F + (X_F)^2 S_D^2.$$

Question 3.7. Soit $(L_n)_{n\geq 0}$ une suite de langages sur un même alphabet fini A. On suppose que l'on a, pour tout $n \geq 0$, $L_n \subset L_{n+1}$. On note $S^{(n)}$ la série génératrice du langage L_n. Montrer que la suite $(S^{(n)})$ converge au sens des séries formelles vers la série génératrice S_L du langage $L = \cup_n L_n$.

Dans le reste de cette partie, Ψ désigne une fonction de $\mathcal{L}(A)$ dans lui-même. On suppose que Ψ est *croissante* au sens suivant : pour tous langages L et L', si $L \subset L'$ alors $\Psi(L) \subset \Psi(L')$.

On définit deux suites de langages $(K_n)_{n\geq 0}$ et $(M_n)_{n\geq 0}$, de la manière suivante : $K_0 = \emptyset$, $M_0 = A^*$, et pour $n \geq 0$, $K_{n+1} = \Psi(K_n)$ et $M_{n+1} = \Psi(M_n)$. Enfin, on pose $K = \cup_n K_n$ et $M = \cap_n M_n$.

Question 3.8.

(a). Montrer que l'on a, pour tout $n \geq 0$, $K_n \subset K_{n+1} \subset M_{n+1} \subset M_n$.

(b). Montrer que K et M satisfont $K = \Psi(K) \subset \Psi(M) \subset M$.

(c). Montrer que, si L est un langage qui satisfait $L = \Phi(L)$, alors $K \subset L \subset \Psi(M)$.

On suppose maintenant que Ψ peut s'exprimer de la manière suivante : pour tout langage L,

$$\Psi(L) = \psi_0 \cup \bigcup_{\ell=1}^{k} \left(\bigcup_{(w_1,\ldots,w_\ell)\in L^\ell} \psi_\ell(w_1,\ldots,w_\ell) \right),$$

où $\psi_0 \in \mathcal{L}(A)$ est un langage fixé et chaque ψ_ℓ (pour $1 \leq \ell \leq k$) est une fonction $(A^*)^\ell \to \mathcal{L}(A)$ qui, à chaque ℓ-uplet de mots, associe un langage.

Question 3.9. Soient L_1, L_2 et L_3 trois langages fixés, et $\overline{\Psi}$ définie (pour cette question seulement) par

$$\overline{\Psi}(L) = L_1 \cup L_2.L \cup L_3.L.L.$$

Trouver un entier k et des ψ_ℓ permettant d'exprimer $\overline{\Psi}$ sous la forme précédente.

Question 3.10. Montrer qu'une telle fonction Ψ est croissante au sens précédemment défini.

Question 3.11. On suppose que chaque ψ_ℓ satisfait la condition suivante : *pour tout ℓ-uplet de mots $(w_1,\ldots,w_\ell)$ et tout mot $w \in \psi_\ell(w_1,\ldots,w_\ell)$, on a $|w| > \sum_{i=1}^{\ell} |w_i|$.*

Montrer que sous ces conditions, le langage K précédemment défini est l'unique langage tel que l'on ait $\Psi(K) = K$.

Question 3.12. On se donne, sur un alphabet A fixé, deux langages L_1 et L_2, dont on suppose que L_2 est préfixe, et qu'aucun mot de L_1 n'a de préfixe dans L_2.

(a). Montrer qu'il existe un unique langage $L \in \mathcal{L}(A)$ tel que l'identité $L = L_1 \cup L_2.L$ soit satisfaite, et que la série génératrice de L satisfait l'équation

$$S_L = S_{L_1} + S_{L_2}.S_L.$$

(b). Montrer que, si les langages L_1 et L_2 ont des séries génératrices rationnelles, alors il en est de même de L.

Partie 4 : Séries formelles et séries entières

Dans cette partie, on s'intéresse aux liens entre la théorie des séries formelles et celle des fonctions sommes de séries entières. Étant donnée une série formelle $U = \sum_n u_n X^n$, on notera $\sum_n u_n t^n$ la série entière correspondante, et, une fois la convergence en un point t (qui sera toujours réel) établie, on notera $\tilde{U}(t)$ la valeur en t de la fonction somme.

Question 4.1. Soit A un alphabet fini, L un langage d'alphabet A, et $S = S_L$ la série génératrice de L. Montrer que la série entière correspondant à S_L a un rayon de convergence strictement positif.

Question 4.2. Soient T et U deux séries formelles dont les séries entières associées ont un rayon de convergence strictement positif. Montrer que les séries formelles $V = T + U$ et $W = T.U$ ont également un rayon de convergence strictement positif, et que l'on a, pour $|t| < \rho$ (pour un certain $\rho > 0$), $\tilde{V}(t) = \tilde{T}(t) + \tilde{U}(t)$ et $\tilde{W}(t) = \tilde{T}(t).\tilde{U}(t)$.

Question 4.3. Soit $\tilde{S}_D$ la somme de la série entière correspondant à la série génératrice du langage D défini à la question **3.6**.

(a). Montrer que la fonction $\tilde{S}_D$ est, sur un voisinage de 0, solution de l'équation fonctionnelle $F(t) = 1 + t^2 F(t)^2$.

(b). Donner une expression analytique pour $\tilde{S}_D(t)$ au voisinage de 0.

Question 4.4. On note d_n le coefficient de degré n de S_D, *i.e.*, $S_D = \sum_n d_n X^n$. Montrer que, pour $n \geq 0$, on a

$$d_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{n!}{(n/2)!(n/2+1)!} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Fin de l'épreuve