ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2012 FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – C – (ULC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le présent sujet comporte 4 pages numérotées de 2 à 5.

Avertissement et Notations

L'usage des calculatrices et téléphones portables est interdit.

L'objet de cette épreuve est l'étude des nombres de Pisot, qui interviennent dans différents domaines de l'arithmétique et de l'analyse. L'épreuve comporte quatre parties. Ces parties ne sont pas indépendantes (les parties 1 à 3 sont liées, la partie 4 ne dépend que de la partie 1). Les résultats de questions non-traitées peuvent être admis et utilisés dans les réponses aux questions suivantes, mais cela doit être clairement indiqué dans la copie.

Dans la suite, on notera $\mathbb{Z}[X]$ (resp. $\mathbb{Q}[X]$) l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (resp. dans $\mathbb{Q}$). On utilisera les deux définitions suivantes:

- $\theta \in \mathbb{C}$ est un *nombre algébrique*, s'il est racine d'un polynôme non-nul de $\mathbb{Q}[X]$.
- $\theta \in \mathbb{C}$ est un *entier algébrique*, s'il est racine d'un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$.

Il est clair qu'un entier algébrique est un nombre algébrique, la réciproque étant fausse. D'autres définitions (dont celle des nombres de Pisot) sont données dans la partie 1.

Partie 1

1. Soit θ un nombre algébrique. Montrer que $I_\theta := \{P \in \mathbb{Q}[X], P(\theta) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$. En déduire qu'il existe un unique polynôme $\Pi_\theta \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire, de degré minimal, et annulant θ. Le polynôme Π_θ est appelé *polynôme minimal de θ.*

2. Un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ est dit *primitif* si ses coefficients sont premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que si $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ sont primitifs, leur produit PQ l'est aussi.

   Indication: On raisonnera par l'absurde. En notant $P = \sum a_k X^k, Q = \sum b_k X^k$ et $PQ = \sum c_k X^k$, on introduira un diviseur premier p de tous les c_k, ainsi que le plus petit entier N pour lequel p ne divise pas a_N.

3. En déduire que si θ est un entier algébrique, alors $\Pi_\theta \in \mathbb{Z}[X]$.

4. *On appelle nombre de Pisot un entier algébrique θ tel que:*

   i) $|\theta| \geq 1$.
   ii) $\forall \alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \neq \theta,\ \ \Pi_\theta(\alpha) = 0 \Rightarrow |\alpha| < 1$.

   On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres de Pisot. Montrer que $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$.

5. Soit $\theta \in \mathcal{P}$. On admet qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, et des nombres complexes $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ de module strictement plus petit que 1, tels que

$$\theta^n + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^n \in \mathbb{Z}, \qquad \text{pour tout } \ n \in \mathbb{N}.$$

   En déduire que la série de terme général $\sin^2(\pi\theta^n)$ est convergente. On montrera dans la partie 3 la réciproque de ce résultat.

Partie 2

Dans toute cette partie,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

désigne une série entière à coefficients complexes c_n, $n \in \mathbb{N}$, de rayon de convergence $R > 0$ (éventuellement infini). On note $D(0,R) := \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$.

1. On suppose dans cette question que f est une fraction rationnelle, c'est-à-dire qu'il existe $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ avec $Q(z) \neq 0$ et $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ pour tout $z \in D(0,R)$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, des complexes non tous nuls $\beta_0, \dots, \beta_p$, et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que
$$\beta_0 c_n \, + \, \beta_1 c_{n+1} \, + \, \dots \, + \, \beta_p c_{n+p} = 0, \qquad \text{pour tout } n \geq n_0. \tag{0.1}$$

2. Réciproquement, on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, des complexes non tous nuls $\beta_0, \dots, \beta_p$, et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que (0.1) soit vérifiée. Montrer que f est une fraction rationnelle.

3. On suppose que f est une fraction rationnelle. Montrer que les déterminants
$$\Delta_m := \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & \dots & c_m \\ c_1 & c_2 & \dots & \dots & c_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_m & c_{m+1} & \dots & \dots & c_{2m} \end{vmatrix}, \quad m \in \mathbb{N}$$
sont tous nuls à partir d'un certain rang.

4. On suppose réciproquement que $\Delta_m = 0$ pour tout m à partir d'un certain rang. On note p le rang minimal. On souhaite montrer que f est une fraction rationnelle. On suppose $p \geq 1$ (le cas $p = 0$ est trivial).
   (a) Montrer qu'il existe des complexes $\beta_0, \dots, \beta_{p-1}$ tels que
   $$C_{j+p} := \beta_0 c_j \, + \, \beta_1 c_{j+1} \, + \, \dots \, + \, \beta_{p-1} c_{j+p-1} + c_{j+p}$$
   soit nul pour tout $j = 0, \dots, p$.
   (b) Montrer que $\Delta_{p+1} = -\Delta_{p-1}(C_{2p+1})^2$.
   (c) Montrer que $C_{j+p} = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.
   Indication: on pourra raisonner par récurrence, et montrer que si C_{j+p} est nul pour tout $j \leq m-1$ ($m > p$), alors $\Delta_m = (-1)^{m+p}\Delta_{p-1}(C_{p+m})^{m-p+1}$.
   (d) En déduire que f est une fraction rationnelle.

5. On suppose que f est une fraction rationnelle, que l'on écrit sous forme irréductible:
$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{p_0 + p_1 z + \cdots + p_m z^m}{q_0 + q_1 z + \cdots + q_n z^n}, \quad z \in D(0,R)$$
avec P et Q premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$, uniques à constante multiplicative près. On suppose de plus que f est à coefficients dans $\mathbb{Z}$: $c_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 0$.

   On admet que les coefficients p_i et q_j peuvent alors être choisis dans $\mathbb{Z}$ et premiers entre eux dans leur ensemble. On supposera désormais ces deux hypothèses satisfaites.

(a) Montrer que les coefficients q_j de Q sont premiers entre eux dans leur ensemble.

(b) En utilisant le théorème de Bezout dans $\mathbb{Q}[X]$, montrer qu'il existe $U, V \in \mathbb{Z}[X]$ et $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $r = Q\,(Uf + V)$.

(c) En déduire que r divise les coefficients de $Uf + V$.

Indication: on pourra s'inspirer du résultat de la question 2, Partie 1, en le généralisant aux séries entières.

(d) Conclure que $q_0 = \pm 1$.

Partie 3

Soient $\theta > 1$ et $\lambda > 0$ tels que la série de terme général $\sin^2(\lambda\pi\theta^n)$ converge. L'objectif de cette partie est de montrer que θ est un nombre de Pisot. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $\lambda\theta^n = a_n + \varepsilon_n$, avec $a_n \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon_n \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. On introduit aussi $\eta_m := a_m - \theta a_{m-1}$, $m \geq 1$.

1. (a) Montrer que les séries de terme général ε_n^2 et η_n^2 convergent.

   (b) On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}$ le déterminant $\Delta_n := |(a_{i+j})_{0 \leq i,j \leq n}|$. Montrer que

   $$\Delta_n^2 \leq \left(\sum_{0}^{n} a_m^2\right)\left(\sum_{1}^{n+1} \eta_m^2\right)\left(\sum_{2}^{n+2} \eta_m^2\right)\cdots\left(\sum_{n}^{2n} \eta_m^2\right)$$

   Indication: on utilisera sans démonstration le lemme d'Hadamard suivant: pour toute matrice A réelle de taille n, de colonnes $A_1, \ldots, A_n$, on a

   $$|\det(A)| \leq \|A_1\|_2 \ldots \|A_n\|_2, \quad \textit{où } \|\ \|_2 \textit{ désigne la norme euclidienne sur } \mathbb{R}^n.$$

   (c) Déduire des questions précédentes que $\Delta_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

2. En utilisant les résultats de la partie 2, montrer qu'il existe deux polynômes $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ premiers entre eux, tels que $Q(0) = 1$ et

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad \forall |z| < \theta^{-1}.$$

3. On garde les notations de la question précédente. Montrer que la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n z^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$, et que

   $$f(z) = \frac{\lambda}{1 - \theta z} - \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad \forall |z| < \theta^{-1}.$$

4. En déduire que θ^{-1} est l'unique zéro de Q dans le disque unité ouvert.

5. Montrer que $(1 - |z|)\,f(z) \to 0$ quand $|z| \to 1$. En déduire que θ^{-1} est l'unique zéro de Q dans le disque unité fermé.

6. En déduire que θ est un nombre de Pisot.

Partie 4

On rappelle pour cette partie le résultat suivant, démontré dans les parties précédentes:

Soit $\theta \geq 1$. Si θ est un nombre de Pisot, la série de terme général $\sin^2(\pi\theta^n)$ *converge. Réciproquement, s'il existe $\lambda > 0$ tel que la série de terme général* $\sin^2(\lambda\pi\theta^n)$ *converge, alors θ est un nombre de Pisot.*

Soit $\theta > 1$. On introduit, pour tout $u > 0$,

$$\Gamma(u) \ := \ \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \cos(u\theta^{-k})$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que dans le cas $\theta = 2$, $\Gamma(u) = \dfrac{\sin(2u)}{2u}$ pour tout $u > 0$.

   Indication: on fera bon usage de la formule $\cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x$.
3. On suppose dans cette question que $\Gamma(u) \not\to 0$ lorsque $u \to +\infty$.
   (a) Montrer l'existence d'un $\delta > 0$, d'une suite réelle convergente $(\lambda_s)_{s\in\mathbb{N}}$, et d'une suite d'entiers strictement croissante $(m_s)_{s\in\mathbb{N}}$ tels que:

   $$\text{pour tout } \ s \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq \lambda_s < \theta, \ \text{ et } \ |\Gamma\left(\pi\lambda_s\theta^{m_s}\right)| \geq \delta.$$

   On notera $u_s = \pi\lambda_s\theta^{m_s}$, et $\lambda \in [1, \theta]$ la limite des λ_s.

   (b) Montrer que pour tout $s \in \mathbb{N}$,

   $$|\Gamma(u_s)| \ \leq \ |\cos(\pi\lambda_s)\cos(\pi\lambda_s\theta)\ldots\cos(\pi\lambda_s\theta^{m_s})| \, .$$

   En déduire que pour tout $s \in \mathbb{N}$,

   $$\sum_{q=0}^{m_s} \sin^2(\pi\lambda_s\theta^q) \leq \ln(1/\delta^2).$$

   (c) En déduire que θ est un nombre de Pisot.
4. On suppose dans cette question que θ est un nombre de Pisot avec $\theta \neq 2$.
   (a) Montrer que $\theta^m \neq \frac{2k+1}{2}$, pour tout $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que le produit $\prod_{m=1}^{n} \cos^2(\pi\theta^{-m})$ converge vers un nombre $A > 0$ lorsque $n \to +\infty$.
   (c) Montrer que le produit $\prod_{m=1}^{n} \cos^2(\pi\theta^{m})$ converge vers un nombre $B > 0$ lorsque $n \to +\infty$.
   (d) En déduire que $\Gamma(u) \not\to 0$ lorsque $u \to +\infty$.