ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2011 FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – A – (XLC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Valeurs singulières d'une matrice et inégalités de traces

Notations et conventions

Dans ce problème l'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ est muni du produit scalaire hermitien usuel noté $(.|.)$; on rappelle qu'il est linéaire à droite, semi-linéaire à gauche et que la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbf{C}^n$ est orthonormale. On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients complexes qu'on identifie à l'espace vectoriel des endormorphismes de $\mathbf{C}^n$ et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Le coefficient de la i-ième ligne et j-ième colonne d'une matrice A est noté A_{ij}. On note A^*, appelée adjointe de la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, la matrice définie pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$ par $A^*_{ij} = \overline{A_{ji}}$.

On définit les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ suivants :

$$\mathcal{H}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) |\ A^* = A\}$$
$$\mathcal{H}_n^+ = \{A \in \mathcal{H}_n |\ (\forall x \in \mathbf{C}^n),\ (x|Ax) \geqslant 0\}$$
$$\mathcal{U}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) |\ (\forall x, y \in \mathbf{C}^n),\ (Ax|Ay) = (x|y)\}$$
$$\mathcal{N}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) |\ AA^* = A^*A\}$$

$\mathcal{D}_n$ désigne l'ensemble des matrices diagonales dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

Enfin, pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbf{C}^n$, $F^\perp$ désigne le sous-espace orthogonal pour le produit hermitien usuel.

Ce problème a pour but l'étude de quelques inégalités de traces sur les matrices carrées à coefficients complexes via l'introduction de la décomposition en valeurs singulières et le calcul de la distance minimale pour la norme de Frobenius entre deux matrices de $\mathcal{H}_n$ définies à équivalence près par des changements de bases dans $\mathcal{U}_n$.

Première partie : étude de $\mathcal{N}_n$

1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer pour tout couple (x, y) de vecteurs de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$:

$$(A^*x|y) = (x|Ay).$$

2a. Montrer que $A \in \mathcal{U}_n$ si et seulement si $A^*A = AA^* = I_n$.

2b. Montrer que $A \in \mathcal{U}_n$ si et seulement si les colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathbf{C}^n$.

3a. Montrer que si $A \in \mathcal{N}_n$, $A((\ker A)^\perp) \subset (\ker A)^\perp$. En déduire que si λ est une valeur propre de A et si E_λ est le sous-espace propre associé, alors $A(E_\lambda^\perp) \subset E_\lambda^\perp$.

3b. En déduire que $\mathcal{N}_n = \{UDU^*,\ U \in \mathcal{U}_n,\ D \in \mathcal{D}_n\}$.

4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ les racines du polynôme caractéristique (non nécessairement distinctes) de A. Montrer que si $A \in \mathcal{N}_n$, alors $\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \sum_{i,j=1}^n |A_{i,j}|^2$. (On pourra calculer la trace de AA^*.)

5a. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que si $A \in \mathcal{N}_n$, alors A et A^* ont même noyau.

5b. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $A \in \mathcal{N}_n$.
(ii) Tout vecteur propre de A est vecteur propre de son adjointe A^*.

Pour $(ii) \Rightarrow (i)$, on pourra procéder par récurrence sur la dimension n et pour un vecteur propre x de A considérer l'orthogonal de l'espace vectoriel engendré par x.

6a. Prouver que si la matrice $A \in \mathcal{N}_n$, son adjointe A^* peut s'exprimer comme un polynôme en A à coefficients complexes. (On pourra utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange.)

6b. Prouver que si A et B sont dans $\mathcal{N}_n$ et commutent alors $AB \in \mathcal{N}_n$.

7. Prouver que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $A \in \mathcal{N}_n$
(ii) Il existe une matrice $U \in \mathcal{U}_n$ commutant avec A telle que $A^* = AU$.

On pourra construire U à partir des valeurs propres de A et raisonner dans une base orthonormale bien choisie.

Deuxième partie : valeurs singulières d'une matrice

8. Montrer que $A \in \mathcal{H}_n$ (resp. $\mathcal{H}_n^+$) si et seulement si A est diagonalisable dans une base orthonormale et ses valeurs propres sont réelles (resp. réelles positives).

9. Montrer que si $A \in \mathcal{H}_n^+$ il existe une unique matrice $S \in \mathcal{H}_n^+$ telle que $S^2 = A$. (Pour l'unicité, on pourra se ramener au cas où A est un multiple de l'identité en considérant les sous-espaces propres de A.)

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ on dit que $A = US$ est une décomposition polaire de A si $S \in \mathcal{H}_n^+$ et $U \in \mathcal{U}_n$. Dans la suite du problème, on admettra l'existence d'une décomposition polaire pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ on dit que $A = UDW$ est une décomposition en valeurs singulières de A si $U, W \in \mathcal{U}_n$ et $D \in \mathcal{D}_n$ est à coefficients réels positifs ou nuls.

10. Prouver que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ admet une décomposition en valeurs singulières. (On pourra commencer par écrire une décomposition polaire de A.)

11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe une décomposition en valeurs singulières de A pour laquelle les coefficients diagonaux $\alpha_i = D_{ii}$ de D vérifient $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$ et que ces coefficients sont alors déterminés de façon unique. On les appelera les valeurs singulières de A.

Troisième partie : inégalités de traces

12. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice vérifiant

$$(\mathcal{P}_k) \qquad P^2 = P = P^*, \quad \operatorname{rang}(P) = k.$$

12a. Montrer que les coefficients de P vérifient :

(i) $0 \leqslant P_{ii} \leqslant 1$ pour tout entier i entre 1 et n,

(ii) $\sum_{i=1}^n P_{ii} = k$.

12b. Soit $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ des réels et D la matrice diagonale telle que $D_{ii} = \lambda_i$ pour tout entier i entre 1 et n. Montrer que $\operatorname{Tr}(PD) \leqslant \sum_{i=1}^k \lambda_i$. Trouver une matrice P vérifiant les conditions $(\mathcal{P}_k)$ telle que $\operatorname{Tr}(PD) = \sum_{i=1}^k \lambda_i$.

12c. Montrer que si P_1, P_2 sont deux matrices vérifiant les conditions $(\mathcal{P}_k)$, il existe $U \in \mathcal{U}_n$ telle que $P_2 = UP_1U^*$. En déduire que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = \max\limits_{U \in \mathcal{U}_n} \operatorname{Tr}(UPU^*D)$ où P est une matrice vérifiant $(\mathcal{P}_k)$.

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est *doublement stochastique* si A est à coefficients réels positifs et vérifie $\sum_{i=1}^n A_{ik} = 1$ et $\sum_{j=1}^n A_{kj} = 1$, pour tout entier k compris entre 1 et n. On note $\mathcal{DS}_n$ l'ensemble des matrices doublement stochastiques dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

13. Montrer que si $U \in \mathcal{U}_n$, la matrice dont les coefficients sont les $|U_{i,j}|^2$ est doublement stochastique.

14. Soit A une matrice doublement stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et soient

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n, \qquad \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots \geqslant \beta_n$$

des réels. On suppose que A n'est pas la matrice identité I_n et on note k le plus petit entier tel que $A_{kk} \neq 1$.

14a. Montrer qu'il existe deux entiers m et ℓ vérifiant $k < m \leqslant n$, $k < \ell \leqslant n$ et tels que $A_{mk} \neq 0$, $A_{k\ell} \neq 0$, $A_{m\ell} \neq 1$.

14b. Construire une matrice doublement stochastique A' de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant :

(i) $A'_{ij} = A_{ij}$ si $(i,j) \notin \{(k,k),(m,k),(k,\ell),(m,\ell)\}$,

(ii) A'_{mk} ou $A'_{k\ell}$ est nul,

(iii) $\sum_{i,j=1}^{n} A'_{i,j}\alpha_i\beta_j \geqslant \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\alpha_i\beta_j$.

En déduire que $\max\limits_{A\in\mathcal{DS}_n} \sum_{i=1,j=1}^{n} A_{i,j}\alpha_i\beta_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$.

15. Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

15a. Soit D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $\alpha_i = D_{ii}$ sont les valeurs singulières de A et soit T la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $\beta_i = T_{ii}$ sont les valeurs singulières de B telles que

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n, \qquad \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots \geqslant \beta_n.$$

Montrer qu'il existe U et V dans $\mathcal{U}_n$ telles que $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(UDVT)$.

15b. Montrer que $\mathrm{Tr}\,(AB) = \sum_{i,j=1}^{n} U_{ij}V_{ji}\alpha_j\beta_i$ et en déduire que

$$|\mathrm{Tr}\,(AB)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i.$$

15c. Soient A et B dans $\mathcal{H}_n^+$. Montrer que $|\mathrm{Tr}\,(AB)| \leqslant \mathrm{Tr}\,(A)\mathrm{Tr}\,(B)$.

16. Soient A et B dans $\mathcal{H}_n$ et soient

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n, \qquad \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots \geqslant \beta_n.$$

leurs valeurs propres.

Montrer que

$$\min_{U\in\mathcal{U}_n} \|A - U^*BU\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i)^2}\,,$$

où la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est donnée par $\|A\|^2 = \mathrm{Tr}\,(A^*A)$. On pourra commencer par déterminer $\max\limits_{U\in\mathcal{U}_n} \mathrm{Tr}\,(AU^*BU)$.

* *
*