ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONCOURS D'ADMISSION 2011 FILIÈRE **MP**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – D – (U)

(Durée : 6 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Dans tout le problème, le corps de base k est le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Soit V un espace vectoriel sur le corps k. Par l'abus de notation habituel, on peut noter 0 le vecteur nul de V. On note $\mathcal{L}(V)$ l'algèbre des endomorphismes de V, c'est-à-dire des applications k-linéaires de V dans lui-même. On se permet de noter multiplicativement la composition des endomorphismes. Ainsi, si u est un endomorphisme de V, u^0 désigne l'application identique I_V de V et, pour tout entier strictement positif r, u^r est la composée de r endomorphismes égaux à u. On note $\mathrm{tr}(u)$ la trace de l'endomorphisme u, $\det(u)$ son déterminant. On dit que u est *nilpotent* s'il existe un entier strictement positif r tel que u^r soit nul.

Soit n un entier strictement positif. On désigne par $\mathcal{M}_n(k)$ l'algèbre des matrices carrées à n lignes et n colonnes, à coefficients dans k. On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(k)$, qui en est l'élément neutre pour la multiplication. Pour A dans $\mathcal{M}_n(k)$, il sera commode de noter φ_A l'endomorphisme de l'espace vectoriel k^n dont la matrice dans la base canonique est A. Le noyau de A est le noyau de φ_A. Le polynôme caractéristique de A est le déterminant de la matrice $XI_n - A$, où X est une indéterminée ; c'est un polynôme en X à coefficients dans k, unitaire de degré n. On note $\mathrm{tr}(A)$ la trace de la matrice A et $\det(A)$ son déterminant. On dit que A est *nilpotente* si φ_A l'est, c'est-à-dire s'il existe un entier r strictement positif tel que A^r soit la matrice nulle. Si V est un espace vectoriel sur k de dimension n et u un endomorphisme de V, le polynôme caractéristique de u est celui de la matrice de u dans n'importe quelle base ; il ne dépend pas du choix de cette base.

La première et la deuxième partie du problème sont indépendantes.

Question préliminaire

Soit V un espace vectoriel sur k de dimension finie n strictement positive. Soit u un endomorphisme nilpotent de V. Prouver que le polynôme minimal de u est de la forme X^r, où r est un entier satisfaisant à $1 \leq r \leq n$, et que αu est nilpotent pour tout scalaire α.

Première partie

Dans cette partie, le corps de base k est $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ formé des matrices de trace nulle. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}$. C'est un cône dans $\mathcal{M}$, appelé le *cône nilpotent*.

1. Soit V un espace vectoriel réel de dimension 2 et soit u un endomorphisme de V nilpotent et non nul. Prouver qu'il existe une base (e_1, e_2) de V telle que $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$.

2. Soit A une matrice nilpotente non nulle dans $\mathcal{M}$. Prouver que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Établir que les éléments de $\mathcal{N}$ sont les matrices de $\mathcal{M}$ dont la trace et le déterminant sont nuls.

4. Quel est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ engendré par $\mathcal{N}$?

5. Soit Φ un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{N}$ contienne $\Phi(\mathcal{N})$. Démontrer que $\Phi(\mathcal{S})$ est égal à $\mathcal{S}$.

6. Soit ι l'application linéaire

$$\iota : (a, b, c) \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Prouver que ι est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathcal{S}$. Démontrer que le cône nilpotent $\mathcal{N}$ est l'image par ι du cône $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ qui a pour équation $a^2 + bc = 0$.

7. Prouver que tout point non nul de $\mathcal{C}$ est un point régulier de la surface $\mathcal{C}$ et que le plan tangent à $\mathcal{C}$ en un tel point P est formé des points Q de $\mathbb{R}^3$ tels que $\operatorname{tr}(\iota(P)\iota(Q)) = 0$.

8. Soit Q un point de $\mathbb{R}^3$ tel que la matrice $\iota(Q)$ soit diagonalisable non nulle. Prouver qu'il existe deux plans tangents à $\mathcal{C} - \{0\}$ passant par Q. On les note Π_1 et Π_2. Prouver que l'intersection de $\mathcal{N}$ et de l'image de ces plans par ι, c'est-à-dire $\mathcal{N} \cap \iota(\Pi_1 \cup \Pi_2)$, est l'ensemble des matrices nilpotentes dont le noyau contient une des deux droites propres de $\iota(Q)$.
[On pourra traiter d'abord le cas où $\iota(Q)$ est diagonale.]

9. Prouver que le complémentaire de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^3$ est la réunion de trois parties connexes par arcs, que ce sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}^3$ et que l'une d'elles est formée des points Q de $\mathbb{R}^3$ tels que $\iota(Q)$ soit une matrice diagonalisable non nulle.

Deuxième partie

Dorénavant, le corps de base k est $\mathbb{C}$. On fixe un entier strictement positif n et un espace vectoriel complexe V de dimension n.

A Réduction d'un endomorphisme nilpotent

On fixe un endomorphisme nilpotent u de V. On note r le degré de son polynôme minimal, où $1 \leq r \leq n$, de sorte que V contient un vecteur x tel que $u^{r-1}(x) \neq 0$.

A.1. Démontrer que les endomorphismes nilpotents de V sont les endomorphismes dont le polynôme caractéristique est X^n.

A.2. Soit x un vecteur de V tel que $u^{r-1}(x) \neq 0$. Pour i un entier tel que $1 \leq i \leq r$, on pose $e_i = u^{i-1}(x)$. Prouver que les vecteurs $e_1, \ldots, e_r$ de V sont linéairement indépendants et que le sous-espace vectoriel W qu'ils engendrent est stable par u. En notant u_W l'endomorphisme de W induit par u, écrire la matrice de u_W dans la base $(e_1, \ldots, e_r)$.

A.3. On conserve les notations de la question précédente. Soit ℓ une forme linéaire sur V qui ne s'annule pas en e_r. Pour i un entier tel que $1 \leq i \leq r$, on pose $\varepsilon_i = \ell \circ u^{i-1}$. Prouver que les formes linéaires $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ sont linéairement indépendantes. Notant W' l'intersection des noyaux de ces formes, démontrer que W' est un supplémentaire de W dans V et que W' est stable par u. Que peut-on dire du polynôme minimal de l'endomorphisme $u_{W'}$ de W' induit par u ?

Pour chaque entier strictement positif i, notons J_i la matrice suivante de $\mathcal{M}_i(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & (0) & \\ 1 & \ddots & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix} ;$$

autrement dit, c'est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^i$ de l'endomorphisme qui envoie chaque vecteur de cette base sur le suivant, sauf le dernier dont l'image est nulle.

A.4. Par récurrence sur l'entier strictement positif n, prouver qu'il existe un entier strictement positif α, une suite finie d'entiers $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha)$ satisfaisant à $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\alpha > 0$, et une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V tels que la matrice de u dans cette base soit la matrice J_λ diagonale par blocs dont les blocs successifs sont $J_{\lambda_1}, \ldots, J_{\lambda_\alpha}$.

A.5. Avec les notations de la question précédente, prouver que pour tout entier strictement positif i, l'entier $\dim \ker u^i - \dim \ker u^{i-1}$ est le cardinal de l'ensemble des entiers j tels que $1 \leq j \leq \alpha$ et $\lambda_j \geq i$. En déduire que dans la question précédente, les entiers $\alpha, \lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ sont déterminés par u.

A.6. On garde les notations de la question A.4. On note $\mathcal{C}(u)$ le commutant de u dans $\mathcal{L}(V)$, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes v de V tels que $uv = vu$. Prouver que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$ de dimension $\sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i(2i-1)$.
[On pourra exprimer les conditions sur $v(e_1), \ldots, v(e_n)$ pour que l'on ait $uv = vu$.]

B Outils topologiques

Si E est un espace vectoriel complexe de dimension finie, toute norme sur E munit E d'une topologie : elle ne dépend pas du choix de cette norme, on l'appelle topologie naturelle de E. En particulier, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et l'espace $\mathbb{C}[X]_{\leq n}$, formé des polynômes de degré au plus n, de leur topologie naturelle.

On rappelle que si p est la dimension de E, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E et si $x_1, \dots, x_p$ sont les applications coordonnées dans cette base, une application ϕ d'un espace topologique T dans E est continue si et seulement si $x_i \circ \phi$ est continue pour tout entier i compris entre 1 et p. Une application linéaire d'un espace vectoriel complexe de dimension finie dans un autre est continue (pour les topologies naturelles).

B.1. Prouver que l'ensemble des applications continues de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ est stable par addition et multiplication : si f et g sont deux telles applications, les applications $f+g$ et fg, qui à une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associent respectivement $f(A)+g(A)$ et $f(A)g(A)$, sont continues.

Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver que les applications de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui à une matrice A associent respectivement AB et BA, sont continues.

B.2. Prouver que l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}[X]_{\leq n}$ qui à une matrice associe son polynôme caractéristique est une application continue. En particulier, l'application déterminant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ est continue.

B.3. Établir que l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

B.4. Soient a, b, r des entiers strictements positifs et soit $\mathcal{M}_{a,b}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients complexes qui ont a lignes et b colonnes. Cet espace est muni de la topologie naturelle. Prouver que la partie de $\mathcal{M}_{a,b}(\mathbb{C})$ formée des matrices de rang supérieur ou égal à r est ouverte.

B.5. Soit $(A_i)_{i\geq 1}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui tend vers une matrice A lorsque i tend vers l'infini. Prouver que pour tout entier i assez grand, on a : $\dim \ker(A) \geq \dim \ker(A_i)$.

C Deux endomorphismes qui commutent

C.1. Soit v un endomorphisme de V. Pour tout vecteur x de V, on note I_x l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(v)(x) = 0$. Prouver que I_x est un idéal de $\mathbb{C}[X]$ non réduit à $\{0\}$, et que son unique générateur unitaire μ_x divise le polynôme minimal de v. Pour un vecteur x de V, prouver l'équivalence des conditions suivantes :

(i) le polynôme μ_x est de degré n ;

(ii) les vecteurs $x, v(x), \dots, v^{n-1}(x)$ sont linéairement indépendants.

Si v est nilpotent, démontrer que ces conditions sont vérifiées si et seulement si il existe une base de V dans laquelle la matrice de v est la matrice J_n décrite avant la question A.4..

On dit que v est *régulier* s'il existe un vecteur x de V vérifiant ces conditions.

C.2. Soit v un endomorphisme régulier de V. Prouver que les endomorphismes qui commutent à v sont les polynômes en v.

C.3. Soit v un endomorphisme de V et soit w un endomorphisme *régulier* de V. On fixe un vecteur x de V tel que $(x, w(x), \dots, w^{n-1}(x))$ soit une base de V, que l'on notera $\mathcal{B}$. Prouver que $v + \varepsilon w$ est régulier pour tous les nombres complexes ε sauf peut-être un nombre fini d'entre eux.

C.4. Soit v un endomorphisme de V. On suppose que dans une base $\mathcal{B}$ de V, l'endomorphisme v a pour matrice la matrice J_λ de la question A.4. Soient $c_1, \ldots, c_\alpha$ des nombres complexes *distincts* deux à deux, et soit w l'endomorphisme de V ayant pour matrice dans la base $\mathcal{B}$ la matrice diagonale par blocs dont les blocs successifs sont $c_1 I_{\lambda_1}, \ldots, c_\alpha I_{\lambda_\alpha}$. Prouver que $v + w$ est régulier.

C.5. Soit u un endomorphisme *nilpotent* de V. Prouver qu'il existe un endomorphisme régulier w qui commute à u.

C.6. Soit u un endomorphisme nilpotent de V et soit v un endomorphisme de V qui commute à u. On note A le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$ engendré par les endomorphismes $u^i v^j$ lorsque i et j parcourent les entiers naturels. Prouver que A est de dimension au plus n.
[On pourra traiter d'abord le cas où v est régulier et utiliser B.4. pour le cas général.]

C.7. Soient u et v deux endomorphismes nilpotents de V qui commutent entre eux. On note B le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$ engendré par les endomorphismes $u^i v^j$ quand (i,j) parcourt les couples d'entiers naturels *non tous deux nuls*. Prouver que B est de dimension au plus $n - 1$.

C.8. Pour $n = 4$, donner un exemple d'endomorphismes u et v comme dans la question C.7., tels que B soit de dimension 3 mais ne contienne aucun endomorphisme régulier.
[On pourra chercher des endomorphismes dont la matrice dans une base donnée de V est triangulaire supérieure, à coefficients 0 ou 1.]

D Partitions

Une *partition* est une suite décroissante $(\lambda_i)_{i \geq 1}$ d'entiers, nuls à partir d'un certain rang. Si $\lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1}$ est une partition, on note $|\lambda|$ la somme des entiers λ_i et on dit que λ est une partition de l'entier $|\lambda|$; enfin, on dit que λ_i est la part d'indice i de λ. Le *diagramme* de λ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées (i,j) sont entières et satisfont à $i \geq 1$ et $1 \leq j \leq \lambda_i$.

D.1. Soit λ une partition. Pour i entier strictement positif, on note μ_i le nombre d'entiers strictement positifs j tels que $i \leq \lambda_j$. Prouver que $\mu = (\mu_i)_{i \geq 1}$ est une partition et que l'on a $|\lambda| = |\mu|$.

On dit que μ est la partition conjuguée de λ et on la note λ'.

D.2. Quelle est la transformation géométrique qui permet de passer du diagramme d'une partition λ à celui de λ' ? (Justifier.) Prouver que $(\lambda')' = \lambda$ pour toute partition λ.

Si $\lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1}$ et $\mu = (\mu_i)_{i \geq 1}$ sont deux partitions, on écrit $\mu \leq \lambda$ si l'on a $|\mu| = |\lambda|$ et si, pour tout entier i strictement positif, $\mu_1 + \cdots + \mu_i \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$.

D.3. Prouver que la relation $\leq$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des partitions. Établir que la restriction de la relation $\leq$ à l'ensemble des partitions de l'entier 6 n'est pas une relation d'ordre total.

D.4. Soient $\lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1}$ et $\mu = (\mu_i)_{i \geq 1}$ deux partitions ; on suppose que $\mu \leq \lambda$ et que $\mu \neq \lambda$. Prouver qu'il existe une partition ν satisfaisant à $\mu \leq \nu \leq \lambda$, $\mu \neq \nu$, et telle que $\nu_i = \mu_i$ pour tous les entiers strictement positifs i sauf deux d'entre eux, i_0 et i_1, pour lesquels on a : $\nu_{i_0} = \mu_{i_0} + 1$ et $\nu_{i_1} = \mu_{i_1} - 1$.

D.5. Soient λ et μ deux partitions. Prouver que les conditions $\mu \leq \lambda$ et $\lambda' \leq \mu'$ sont équivalentes.

E Topologie des classes de similitude

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

À chaque partition λ de n dont les parts non nulles sont $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\alpha > 0$, on associe la matrice J_λ décrite dans la question A.4. et on note $\mathcal{N}_\lambda$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblables à J_λ.

E.1. Prouver que, quand λ parcourt l'ensemble des partitions de n, les parties $\mathcal{N}_\lambda$ sont deux à deux disjointes et que $\mathcal{N}$ est l'union des $\mathcal{N}_\lambda$. Prouver que si λ est une partition de n, l'adhérence de $\mathcal{N}_\lambda$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une réunion de parties de la forme $\mathcal{N}_\mu$.

E.2. Soit λ une partition de n. Calculer $DJ_\lambda D^{-1}$ lorsque D est une matrice diagonale inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver que la matrice nulle est dans l'adhérence de $\mathcal{N}_\lambda$. Soit $\mathcal{N}^{\text{reg}}$ l'ensemble des matrices semblables à J_n, correspondant à la partition qui a une seule part non nulle, $(n, 0, \dots)$. Prouver que l'adhérence de $\mathcal{N}^{\text{reg}}$ est $\mathcal{N}$ et que $\mathcal{N}^{\text{reg}}$ est une partie ouverte de $\mathcal{N}$.

E.3. Soient λ et μ deux partitions de n. On suppose que l'adhérence de $\mathcal{N}_\lambda$ contient $\mathcal{N}_\mu$. Prouver que l'on a : $\mu \leq \lambda$.
[On pourra utiliser en particulier les questions A.5. et B.5.]

E.4. Supposons n pair, $n = 2m$. Soient λ la partition $(m+1, m-1, 0, \dots)$ et μ la partition $(m, m, 0, \dots)$. Prouver que l'adhérence de $\mathcal{N}_\lambda$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contient $\mathcal{N}_\mu$.
[Si $(e_1, \dots, e_{m+1}, f_1, \dots, f_{m-1})$ est une base de $\mathbb{C}^n$ et si u est l'endomorphisme qui a dans cette base la matrice J_λ, on pourra considérer les images de $e_2 + f_1$ et εe_1 par u et ses itérés, pour tout nombre complexe non nul ε.]

E.5. Soit λ une partition de n. Montrer que l'adhérence de $\mathcal{N}_\lambda$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est la réunion des $\mathcal{N}_\mu$ où μ parcourt l'ensemble des partitions de n telles que $\mu \leq \lambda$.

Fin de l'épreuve