
EPREUVE ECRITE DE MATHS - INFO

ENS : PARIS - LYON - CACHAN

Coefficients : PARIS 4

LYON 4

CACHAN 5

MEMBRES DE JURYS : J. Goubault-Larrecq – B. Gaujal – P. Gaudry

L'épreuve de mathématiques et informatique en était en 2004 à sa troisième édition. Elle portait cette année sur une application informatique des techniques homologiques : le théorème de Kahn-Saks-Sturtevant (1984), qui prouve la non-existence de certains algorithmes efficaces.

La première partie était pratiquement une question de cours ; il s'agissait de redémontrer la correction d'un algorithme d'orthogonalisation de matrices. On testait ici les capacités élémentaires d'analyse de programme. Cette partie a surtout permis de départager les candidats les plus faibles.

La seconde partie introduisait la notion d'espaces vectoriels d'homologie, un cas particulier simple des modules d'homologie, qui suffit à introduire les nombres de Betti et la caractéristique d'Euler. Il s'agissait d'une partie mathématique, que beaucoup de candidats ont bien réussie.

La troisième partie était une partie plus informatique. Son but était de montrer comment on pouvait calculer les nombres de Betti, par des méthodes d'algèbre linéaire d'abord, reposant sur les résultats de la partie 1. La fin de la partie était plus mathématique, et consistait à montrer que deux complexes simplement homotopes étaient homologues. L'application informatique, consistant à réduire un complexe simplicial à un autre, plus simple mais simplement homotope, pour calculer son homologie, était exploitée uniquement à travers un exemple.

La quatrième partie introduisait un raffinement de la notion d'homotopie simple à travers la notion de champ de vecteur discret. Le sujet culminait en cinquième partie, sur le théorème de Kahn-Saks-Sturtevant. Il s'agit d'un résultat informatique nécessitant les notions mathématiques, non triviales, introduites dans les parties précédentes.

Comme chaque année, le sujet n'était pas réalisable en totalité en quatre heures. La plupart des bons candidats ont pu faire les parties 1 à 3, certains ont décidé de sauter la partie 3 pour aller tenter leur chance en parties 4 et 5. Les tout meilleurs, qui ont eu 19 ou plus, ont traité correctement environ deux tiers à trois quarts du sujet. Les questions qui comptaient le plus étaient, en ordre décroissant, la 4.3, la 3.3, la 5.3, la 3.4, la 4.1, et la 5.4. La plupart des candidats ont bien compris la notion d'homologie, et ont eu plus de mal sur la conservation de l'homologie par homotopie simple (3.3, 3.4), ou pour voir ce qui se passait finement en questions 4.1 et 4.2. La question 4.3, qui était de loin la plus compliquée du sujet, a été traitée par très peu de candidats. Mais ceux qui ont eu le courage de la traiter ont eu en général les meilleures notes. Quelques candidats ont traité la partie 5.

Remarques générales et faits saillants

Comme toujours, prime a été donnée aux candidats sachant répondre aux questions difficiles au détriment de ceux qui se sont contentés de répondre à des bouts de questions élémentaires tout au long du sujet. La partie 2, relativement facile, comptait pour 12,2% des points, les parties 3 et 5, plus difficiles, pour 24,5% chacune, la partie 4 pour 28,8% des points à elle seule. La partie 1, triviale, comptait pour 10% des points.

De plus, des points bonus ont été attribués à quelques candidats qui se sont concentrés, et ont bien maîtrisé une ou plusieurs parties complètes, au détriment peut-être du reste de la preuve. On a ainsi voulu donner une prime aux candidats qui ont voulu bien traiter, sérieusement, complètement, un aspect du sujet.

Citons ensuite quelques bourdes classiques, qu'il serait facile d'éviter :

- *un résultat simple demande une démonstration simple.* En 1.1, une question triviale, on demandait de montrer l'égalité de deux espaces vectoriels évidemment égaux. Certains candidats ont invoqué des raisons d'inclusion dans un sens, de dimension dans l'autre, distinguant deux cas. En 1.4, certains candidats ont passé beaucoup de temps à montrer le fait bien connu que toute famille orthogonale de vecteurs non nuls était libre.

- *un argument confus ne vaut rien.* Certains candidats pensent qu'en développant un argument confus, le correcteur leur donnera éventuellement quelques points, peut-être à la faveur du doute. Non : au pire, il se peut même que le correcteur ne voit pas, du coup, que le candidat avait compris quelque chose à la question. On pourra citer notamment les innombrables bidouilles sur les indices à la question 2.2. De plus, ceci coûte du temps au candidat. A l'opposé, un candidat qui a bien expliqué l'intuition géométrique en question 3.4 a eu des points en plus.

- *les sommations ne commutent pas avec le symbole O de Landau.* En 1.3, nombre de candidats ont écrit que **GS1** effectuant $O(km)$ opérations, la complexité de **GS** était $\sum_k O(km) = O(\sum_k km)$, ce qui n'a aucun sens. Ceci a été d'autant plus sévèrement jugé que la question était simple.

- *toute matrice n'est pas une matrice carrée.* En 1.4, de nombreux candidats ont affirmé que la dimension du noyau de A était égale à celle de la transposée de A . Or ce résultat n'est valide que pour des matrices carrées, ce que les matrices considérées n'étaient pas en général.

- *il faut s'appliquer dans les questions portant sur des exemples.* Les questions 2.4 et 3.5 demandaient à faire des calculs sur des exemples particuliers. Ces questions ne comptaient pas pour beaucoup, mais étaient indispensables pour bien comprendre ce qui se passait. Certains les ont fait en vitesse, et ont conclu à tort par exemple que le p ème nombre de Betti était juste le nombre de simplexes de dimension p . L'exercice aurait dû leur démontrer pourquoi ce n'était pas le cas.

- *il faut bien lire l'énoncé.* Par exemple, en question 3.4, il était demandé de démontrer que certains objets étaient des complexes normaux. Beaucoup de candidats ont vérifié la normalité, mais n'ont pas pensé qu'il fallait aussi vérifier qu'il s'agissait de complexes, tout simplement.

En ce qui concerne les aspects informatiques, on ne peut que se féliciter que les candidats, dans l'ensemble, comprennent mieux les programmes, savent analyser de petits programmes, et savent évaluer leur complexité, plus ou moins correctement. Ils ont en général bien compris (par exemple en question 3.2) que l'on pouvait appeler les programmes écrits précédemment comme des sous-programmes, même si certains candidats font l'erreur de recopier entièrement ces programmes précédents, fabriquant ainsi un programme illisible. De plus, les programmes sont mieux expliqués que les années précédentes : rappelons qu'un programme non commenté est la plupart du temps illisible, et donc moins bien noté.