

EPREUVE ECRITE DE : MATHÉMATIQUE-INFORMATIQUE

ENS: PARIS-LYON-CACHAN

Coefficient : PARIS: 4 LYON: 4 CACHAN 5

MEMBRES DE JURY:

1 Présentation du sujet

La plupart des questions s'inspirent du livre de Marshall et Olkin : *Inequalities: theory of majorization, and its applications* (Academic Press 1979). La preuve du théorème de Birkhoff proposée est inspirée de celle de Mirsky, *Transversal Theory* (Academic press, 1971). Le traitement des tournois est mal fait dans le livre de Marshall et Olkin. Les questions posées ici viennent d'une simplification de la preuve faite dans Brauer, Gentry, Shaw, "A new proof of a result by H.G. Landau on tournament matrices", J. Combin. Theory, 1968.

Les deux premières parties montrent que y est majorisé par x si et seulement si il existe une matrice doublement stochastique P telle que $y = xP$. Le théorème de Birkhoff permet ensuite de conclure que l'ensemble des vecteurs majorisés par x est l'enveloppe convexe des permutations de x .

La partie 3 montrait des applications à la coloration de graphes et à la caractérisation des scores des tournois. À cet égard, on peut mentionner le fait que ce problème reste largement ouvert pour les multi-tournois (chaque équipe joue plusieurs fois contre le même adversaire).

La partie 4 introduit la Schur-convexité (appelée Schur croissance dans le sujet) et présente des applications élémentaires aux polygones inscrits et circonscrits.

2 Commentaires généraux

L'impression générale est que beaucoup trop de candidats foncent "bille en tête" sans même s'apercevoir qu'ils ne répondent pas vraiment à la question posée, en allant au plus simple, avec peu de rigueur. Les exemples symptomatiques sont la non-vérification de la positivité du produit dans la question 2.1, la non-vérification de la décroissance pour chaque étape de la récurrence à la question 2.6, la décroissance pour la question 3.2 et le centre du cercle pour la question 4.4.

Les questions ne comportaient pas vraiment de pièges, On peut cependant souligner qu'*a priori*, aucune question n'est gratuite, c'est-à-dire ne peut être résolue d'un simple renvoi aux questions précédentes. *A contrario*, même si une réponse en trois pages densément écrites peut être correcte, il existe toujours une réponse plus concise, qui ne nécessite pas nécessairement des astuces inconcevables.

Notation La notation était faite sur 100 points. Un total de 44 ou plus assurait la note maximale (20). La moyenne a été de 9/20 avec un écart-type de 3,5 points, sur un peu plus de 200 candidats.

3 Commentaires sur la partie 1

La partie préliminaire devait servir de “mise en jambe”. Beaucoup trop de candidats la traitent mal.

1.1 Quelques copies donnent un contre-exemple dans \mathbb{R}^2 . En toute rigueur, cela ne dit rien du cas général \mathbb{R}^n .

1.2 Les questions simples doivent amener des solutions courtes.

1.3 Cette question a été très inégalement traitée.

4 Commentaires sur la partie 2

La partie 2 était la partie la plus consistante du sujet. Les questions 2.3, 2.5 et 2.8 étaient difficiles. On pouvait cependant admettre le résultat et continuer sans trop de difficultés.

2.1 Bon nombre de candidats ont remarqué que $eP = e$ et $Pe' = e'$. En revanche très peu d'entre eux l'utilisent pour le produit: $eP_1P_2 = eP_2 = e$ et $P_1P_2e' = P_2e' = e'$.

2.1 et 2.2 la vérification de $P_{ij} \geq 0$ est “oubliée” dans un grand nombre de copies.

2.3 Question un peu difficile. Très peu de candidats parviennent à montrer que $y \preceq x$.

2.4 Question facile, la mieux réussie de toutes. À l'évidence, les candidats savent faire les manipulations élémentaires sur les matrices.

2.5 La plupart des candidats omettent de vérifier que $y \preceq xT_1$, ce qui est pourtant le centre de la question. Très peu de candidats parviennent à trouver de bons indices pour la transformation et ensuite à faire la preuve proprement.

2.6 La grande majorité des copies manque de rigueur dans cette question facile et oublie de trier les vecteurs à chaque étape et de faire une récurrence rigoureuse.

2.7 Beaucoup de candidats semble sauter intentionnellement cette question algorithmique (pour gagner du temps?). Ceux qui l'ont traitée l'ont bien faite en général, pour leur plus grand bénéfice.

2.8 Question difficile. Seulement deux copies, remarquables par ailleurs, traitent parfaitement cette question.

2.9, 2.10 Les candidats qui ont essayé ces questions les ont en général bien traitées.

2.11 Très peu de candidats s'essayent au dessin. Les réponses correctes à cette question facile, une fois la question précédente traitée, se comptent sur les doigts d'une main.

5 Commentaires sur la partie 3

La partie 3 a plus intéressé les candidats, mais a été très mal traitée en général. Elle était plus difficile qu'il ne semble au premier abord.

3.1 Beaucoup de bonnes réponses, manquant souvent de rigueur. Il semble que les graphes soient aujourd'hui connus de beaucoup de candidats.

3.2 Catastrophe sur cette question, qui n'était pourtant pas trop difficile si on a réfléchi sur les questions 2.4 et 2.5. La très grande majorité des candidats compare les sommes partielles sans voir que les vecteurs ne sont pas triés.

3.3 Question peu traitée, qui étaient dans le même esprit que la question 2.6.

3.4 Question simple, grappillée par beaucoup de candidats, mais elle ne rapportait pas beaucoup.

3.5 Question assez simple mais qui a très mal été traitée, souvent par manque de rigueur.

3.6 Il s'agit de la question la plus difficile du sujet. Elle a peu été regardée.

6 Commentaires sur la partie 4

La partie 4 était plus analytique que les autres mais aussi sans doute plus facile. Cependant, elle n'a pas été traitée ou alors très partiellement.

4.1 Quelques rares copies traitent cette question complètement. Elle ressemble pourtant beaucoup à la question 2.6.

4.2 Aucune copie ne traite cette question entièrement.

4.3 Ceux qui ont regardé cette question assez facile l'ont bien traitée.

4.4 Une question qui paraît facile et pourtant très peu de candidats pensent à traiter le cas où le centre n'est pas à l'intérieur du polygone, auquel cas ils n'obtiennent que très peu de points.

4.5 et 4.6 n'ont pas été vraiment regardées.