Rapport sur l'oral de mathématiques

Oral spécifique E.N.S. Paris : David Harari
Oral commun Paris-Lyon-Cachan : Antoine Chambert-Loir, Sorin Dumitrescu, Gregory Miermont.

1 Remarques générales sur la session 2005

Le niveau d'ensemble des candidats nous a paru cette année sensiblement équivalent à celui de l'année dernière. En particulier, parmi les 117 candidats qui ont passé l'oral spécifique Ulm, le nombre de prestations vraiment très faibles reste peu élevé (aux alentours de 10 %). Par contre, il semble qu'il y ait eu un peu moins de candidats vraiment brillants, même si cette impression vient peut-être davantage de l'affaiblissement du programme que de celui des candidats.

Qu'il nous soit permis ici en passant d'exprimer notre vif mécontentement vis à vis des suppressions incessantes, irrationnelles et incohérentes dans le programme de mathématiques des classes MP*. Nous n'avons rien contre quelques allégements dans la mesure où les élèves des classes préparatoires ont fort à faire pour préparer toutes les matières qui figurent au menu des différents concours. Mais on ne peut pas tolérer des modifications qui le plus souvent rendent impossible un enseignement raisonnable des concepts de base en mathématiques. Citons en vrac (la liste est hélas non exhaustive) :

- la disparition de la notion d'ensemble quotient (même celle de relation d'équivalence, sans laquelle on ne peut rien faire en mathématiques, ne figure pas explicitement au programme).
- la suppression des matrices hermitiennes et unitaires (alors que les matrices orthogonales, dont la réduction est plus compliquée, subsistent).

- le renoncement à toute abstraction en topologie; en particulier l'absence de certaines démonstrations fondamentales (théorème des valeurs intermédiaires, théorème de Bolzano Weierstrass, qui sont pourtant assez simples à partir de l'axiome de la borne supérieure) est franchement préjudiciable.

- l'oubli du théorème d'inversion locale (alors que celui d'inversion globale demeure; quelle source de confusions pour les élèves !).

- le point de vue étrange adopté dans l'étude de l'ensemble $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (toujours parce qu'on ne veut pas parler de quotient); les pauvres candidats qui n'ont pas eu la chance d'avoir les bonnes explications nagent dans des divisions euclidiennes incommodes au lieu de raisonner simplement avec les classes modulo n.

La conséquence de ce massacre en règle est que les examinateurs sont assez souvent placés devant un dilemme difficile : poser un exercice qui demande très peu de connaissances (mais alors à quoi cela sert-il que les candidats se préparent toute l'année, et comment être sûr de recruter nos futurs mathématiciens sur les critères qui nous intéressent vraiment ?), ou bien avantager outrageusement ceux qui viennent des "grandes" prépas, celles dans lesquelles le professeur passe outre les instructions officielles et continue à enseigner correctement les notions mathématiques les plus importantes. Si rien n'est fait pour inverser la tendance et revenir à des programmes plus cohérents, les E.N.S. risquent à court terme de ne plus pouvoir faire fonctionner leur concours correctement à moins d'avoir un programme spécifique.

2 Commentaires mathématiques d'ensemble

Il va de soi que pour réussir ces épreuves orales, il est important de bien connaître le cours et d'être rigoureux dans l'application des théorèmes du programme, en particulier en vérifiant correctement toutes les hypothèses. Il est par exemple surprenant que nombre de candidats admissibles soient incapables d'énoncer et de démontrer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2.

Il faut noter que la plupart des exercices proposés (notamment à l'oral spécifique) sont volontairement difficiles. En effet, les examinateurs veulent tester les facultés de reflexion et d'imagination du candidat, et également sa capacité à utiliser leurs indications. A cet égard, ceux qui s'expriment bien et ne se laissent pas déstabiliser par une question a priori déroutante ont davantage de chances de réussir leur interrogation.

Rappelons qu'on n'attend donc pas des candidats qu'ils trouvent des astuces miracle permettant de résoudre immédiatement la question posée. En général (tout comme dans les problèmes mathématiques de niveau plus avancé) il n'y en a pas ! On apprécie par contre les candidats qui essaient de débroussailler le problème et d'avancer peu à peu vers sa solution en suivant un cheminement logique. Regarder un cas particulier (surtout quand la question est posée de façon "ouverte"), faire un dessin, procéder par analogie avec une situation connue, sont par exemple des méthodes trop rarement utilisées par les candidats, qui ont tendance à se décourager dès que leur première idée n'aboutit pas, alors même que l'examinateur aura peut-être été favorablement impressionné par leur démarche.

En ce qui concerne la forme, les reproches seront sensiblement les mêmes que l'an dernier bien qu'il y ait eu des améliorations, notamment au niveau de la précision du langage. Voici une petite liste des écueils à éviter :

- Commencer presque toutes ses phrases par "en fait", ce qui n'apporte rien et éveille la méfiance de l'examinateur.
- "Sauter à la gorge" de l'interrogateur au lieu de s'arrêter un moment pour réflechir.
- Écrire dans tous les sens au tableau des assertions sans rapport avec le problème posé, comme si on voulait juste étaler sa science.
- Écrire minuscule (une spécialité cette année !).
- Attendre sans arrêt l'approbation de l'examinateur pour lui extorquer des éléments de réponse.
- Séparer de manière artificielle plusieurs cas et les traiter séparement même s'il n'y a pas du tout besoin de le faire.

3 Commentaires mathématiques de détails

Arithmétique et algèbre.

L'algèbre générale ayant malheureusement quasiment disparu du programme, les rares questions posées dans ce domaine ont en général porté sur les groupes et sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Les candidats se sont en général plutôt bien tirés des exercices (parfois difficiles) portant sur les groupes, ce qui est une bonne surprise. En revanche, sans doute à cause du point de vue adopté dans le programme pour son étude (cf. nos récriminations plus haut), l'ensemble

$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ semble désormais être devenu la bête noire de beaucoup de candidats. Une question aussi simple que "déterminer le nombre de solutions de l'équation $mx = 0$ dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$" (pour des entiers m et n) a semé la panique, les candidats parlant parfois d'"élément divisible par n" ou "premier avec n" dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ en mélangeant allègrement les entiers et leur classe modulo n. Il y a aussi une totale incompréhension du lemme chinois qui est vu comme une suite mystérieuse de divisions euclidiennes au lieu d'un isomorphisme canonique d'anneaux commutatifs. De même la structure de corps de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est souvent insuffisamment comprise, les candidats ayant par exemple parfois l'air de considérer comme scandaleux qu'on puisse considérer un espace vectoriel sur un tel corps. Bref, on ne peut qu'encourager les futurs candidats à passer du temps pour comprendre le fonctionnement de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, afin de savoir calculer directement avec les classes d'équivalence sans avoir besoin de revenir sans arrêt à $\mathbf{Z}$.

Par rapport à l'année dernière, nous avons noté une nette baisse du niveau en algèbre linéaire. Les candidats se précipitent pour trigonaliser les matrices complexes même si cela ne sert clairement à rien pour le problème posé, ne savent souvent plus vraiment appliquer le lemme des noyaux (evidemment, le fait d'avoir supprimé du programme la décomposition en sous-espaces caractéristiques ne les aide pas !), ou encore foncent tête baissée dans des calculs inextricables avec les matrices au lieu de réflechir à la signification intrinsèque du problème posé. On remarque aussi une tendance à utiliser des théorèmes difficiles même quand c'est inutile : certains ont besoin de Cayley-Hamilton et du lemme des noyaux pour démontrer qu'une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples est diagonalisable (l'argument consistant à dire qu'il y a n vecteurs propres pour n valeurs propres distinctes ne semble pas naturel aux candidats). Certains ont même du mal à justifier qu'une matrice complexe possède un vecteur propre sans trigonaliser ni utiliser Cayley-Hamilton ! Il y a enfin un manque d'aisance flagrant lorsqu'il s'agit de calculer les valeurs propres de matrices assez simples.

Les exercices d'algèbre quadratique ont été plutôt mieux traités que l'an dernier, peut-être parce que le programme ne permet plus de poser des exercices réellement difficiles sur ce sujet. Il y a quand même de temps en temps un surprenant manque de familiarité avec les isométries du plan ou de l'espace euclidien, et les inévitables confusions entre matrices orthogonales et symétriques. Cette dernière notion n'est d'ailleurs pas toujours bien assimilée, un candidat ayant par exemple affirmé que "si la diagonale d'une matrice symétrique positive était positive, ça se saurait" (sic). Là encore, comprendre le point de vue intrinsèque (via les endomorphismes symétriques d'un espace euclidien) pourrait sans doute aider les candidats.

Analyse.

Tout comme l'an dernier, les exercices théoriques sur les fonctions d'une variable réelle ont souvent été bien traités. Il y a par contre quelques flottements au niveau des formules de Taylor, soit parce qu'elles sont écrites incorrectement, soit parce que les candidats ont tendance à vouloir utiliser la formule de Taylor-Young même quand le problème n'est pas complètement "local", et requiert clairement une formule plus précise (du type "avec reste intégral"). On note aussi que la plupart des candidats n'aiment pas utiliser les nombres complexes et reviennent sans cesse aux réels, alors que pourtant il est en général bien plus facile de manipuler des exponentielles complexes que des fonctions sinus et cosinus, en particulier pour les questions sur les séries de Fourier.

Le calcul différentiel est dans l'ensemble plutôt bien compris, bien qu'il y ait eu quelques fautes grossières sur les conditions nécessaires pour avoir un extremum local (certains candidats pensent que toutes les dérivées partielles d'ordre ≥ 3 doivent s'annuler). La plupart des candidats ont paru assez à l'aise pour calculer des différentielles et ont compris correctement la notion d'application linéaire tangente. Ils savent également utiliser les techniques usuelles pour les questions sur les équations différentielles. Par contre en géométrie différentielle, beaucoup de candidats sont peu habiles pour calculer par exemple la longueur d'une courbe en coordonnées sphériques alors que l'élément de longueur correspondant est manipulé couramment en physique.

Les exercices de topologie et géométrie ont fréquemment permis de faire la différence entre les candidats. Ceux qui ont des connaissances solides et ont vraiment réflechi à la signification des concepts topologiques (qui sont souvent délicats) ont pu tirer leur épingle du jeu et nous ont impressionné par leur maîtrise, qui leur a parfois permis de résoudre des problèmes a priori ardus. A contrario, ceux qui se contentent d'une approche superficielle ont souvent été lourdement sanctionnés par leur incapacité à traduire simplement des propriétés telles que : la continuité d'une application linéaire, la convexité d'une partie, la densité d'un ensemble...

4 En guise de conclusion...

...voici quelques exemples d'exercices posés cette année à l'oral spécifique Ulm :

- Soit p un nombre premier, on note $\mathcal{S}_p$ le groupe symétrique associé. Soit D un sous-groupe de $\mathcal{S}_p$. Déterminer le cardinal de l'ensemble des homomorphismes de D dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

- Soient $A \in M_n(\mathbf{Z})$ et p un nombre premier impair. On suppose que la réduction mod. p de A dans $M_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ est l'identité. Montrer que s'il existe un entier $r > 0$ tel que $A^r = I_n$, alors $A = I_n$.

- Soient K un corps commutatif et $A \in M_n(K)$, n entier ≥ 2. On suppose qu'il existe $x \in K^n$ tel que $(x, Ax, ...A^{n-1}x)$ soit une base de K^n. Montrer qu'il existe une matrice symétrique inversible S de $M_n(K)$ telle que $SAS^{-1} =^t A$.

- Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des entiers avec $0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n$. Soient $a_0, ..., a_n$ des complexes avec $a_0 a_1 \neq 0$. On pose

  $$Q(z) = a_0 z^{\lambda_n} + \sum_{k=1}^{n} a_k z^{\lambda_n - \lambda_k}$$

  Montrer que le polynôme Q possède une racine z_0 telle que

  $$\mid z_0 \mid \geq [\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)...(\lambda_n - \lambda_1)}{\lambda_2 \lambda_3 ... \lambda_n}]^{1/\lambda_1} \mid \frac{a_1}{a_0} \mid^{1/\lambda_1}$$

- Soit E un e.v.n. sur $\mathbf{R}$.

  a) Soit $x_0 \in E$. Montrer que l'application $p : E \to \mathbf{R}_+$ définie par

  $$p(a) = \inf_{\lambda \in \mathbf{R}} \| a + \lambda x_0 \|$$

  vérifie, pour tous a, b de E et tout α de $\mathbf{R}$:

  $$p(a+b) \leq p(a) + p(b) \qquad p(\alpha a) = \mid \alpha \mid p(a)$$

  Quels sont les a de E pour lesquels $p(a) = 0$?

  b) On suppose que E possède une partie dénombrable dense $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$. Montrer qu'il existe une norme N sur E, équivalente à $\| \, . \, \|$, et vérifiant, pour x, y dans E, $N(x+y) = N(x) + N(y)$ si et seulement si : $x = 0$ ou $y = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbf{R}_+$.

- On munit $M_n(\mathbf{R})$ d'une norme matricielle telle que

  $$\| AB \| \leq \| A \| . \| B \|$$

  pour tout couple (A, B) de matrices.

  Soient K, δ, σ des réels > 0. Soient A, B des matrices vérifiant

$$\| B - A \| \leq \delta$$

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \| e^{tA} \| \leq K e^{-\sigma t}$$

Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on a

$$\| e^{tB} \| \leq K e^{(K\delta - \sigma)t}$$

- Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière à coefficients complexes. On suppose que son rayon de convergence est au moins 1 et on appelle D le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1. On pose, pour $r \in]0,1[$, $M(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} | a_n | r^n$.

  Montrer que si $f(D)$ est d'aire finie, alors

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{M(r)}{\sqrt{-\log(1-r^2)}} = 0$$

- Soit f une fonction C^∞ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que $\frac{f(x)}{x^n}$ tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$. Montrer que pour tout entier $r \geq n+1$, la fonction $f^{(r)}$ a un zéro réel. Est-il possible que pour $k \leq n$, $f^{(k)}$ n'ait pas de zéros ?