ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHS-INFO

ENS : PARIS LYON CACHAN

Coefficients : **PARIS 4 LYON 4 CACHAN 5**

MEMBRES DE JURYS : A. Darte, P. Gaudry et P. Weil.

Le but du problème était d'étudier un algorithme permettant de trouver la forme close, lorsqu'elle existe, d'une intégrale pseudo-hyperelliptique $\int \frac{h(u)\mathrm{d}u}{\sqrt{D(u)}}$, où h et D sont des polynômes. L'outil principal était le développement en fraction continue de la série formelle associée à $\sqrt{D}$. Il s'agissait donc de fractions continues de polynômes, un formalisme en général plus simple que les fractions continues d'entiers mais qui peut être déroutant au premier abord.

Les parties 1 et 2 étaient consacrées aux propriétés élémentaires des fractions continues et des séries formelles de Laurent. La partie 3 formait le cœur du problème : on y étudiait les propriétés fondamentales des fractions continues de polynômes avec en particulier un lemme de meilleure approximation et une méthode permettant de calculer la fraction continue de la série $\sqrt{D}$ sans calculer cette série. Dans la partie 4, ces résultats étaient appliqués au problème initial de la simplification d'intégrales : on montrait que si l'intégrale ci-dessus admet une écriture de la forme $\log(a + b\sqrt{D})$ avec a et b des polynômes, alors a/b apparaîtra comme un convergent dans la fraction continue de $\sqrt{D}$.

Notons que l'algorithme étudié n'était qu'une version partielle de l'algorithme total, puisqu'il ne permettait pas de décider de l'existence ou non d'une forme close.

Remarques générales

Le sujet était long et le traiter en entier dans le temps imparti n'était probablement pas réalisable. De fait, la quatrième partie n'a quasiment pas été abordée par les candidats. La plupart ont attaqué les deux premières parties ainsi que le tout début de la partie 3, ce qui leur permettait en théorie d'obtenir une note maximale de 14. Les meilleurs candidats ont traité quelques questions difficiles de la partie 3 ce qui les départage nettement de ceux qui se sont contentés des questions plus faciles.

Rappelons le soin à apporter à la rédaction et à la présentation. Par exemple, le sujet nécessitait bon nombre de preuves par récurrence, certaines très simples, d'autres présentant des subtilités. Il est crucial que le candidat démontre lors des premières questions qu'il sait rédiger proprement une récurrence, même simple. Par la suite, on admet alors plus facilement les arguments du type «par une récurrence évidente». Toutefois, ce genre de phrase doit être employé avec circonspection et les points clefs du raisonnement doivent de toute façon être mis en évidence. Globalement, on peut regretter, et ce un peu plus chaque année, que les candidats se contentent de pseudo-démonstrations, imprécises et incomplètes, parfois agrémentées d'arnaques, à moins qu'ils soient simplement incapables de déterminer à partir de quand une séquence d'arguments mérite le nom de démonstration. Rappelons enfin que la note n'est que très peu corrélée à la longueur de la copie. La clarté d'une démonstration réside parfois aussi dans sa concision.

Questions détaillées

Question 1.1. Ces questions très simples, en guise de mise en jambe, avaient pour but de familiariser le candidat avec les séries formelles de Laurent, notamment de faire sentir la notion de valuation et la validité de la notation $\sum$. Elles ont été bien traitées dans l'ensemble, parfois cependant de manière trop verbeuse.

Question 1.2. Cette question facile a été très mal réussie en moyenne. Beaucoup de candidats ont oublié de vérifier certaines propriétés comme la distributivité (triviale à démontrer) ou bien l'associativité (facile mais non immédiate dans le cas de la multiplication). Cela vient probablement du fait que, durant leur scolarité, les candidats traitent souvent d'anneaux qui apparaissent comme sous-anneaux d'une structure plus générale, et donc seule la stabilité est pertinente. Malheureusement, cela n'était pas le cas ici.

Question 1.3. Cette question a été relativement bien réussie dans l'ensemble. Attention toutefois à bien séparer la phase (facultative) de recherche de conditions nécessaires de la phase où l'on vérifie qu'on a bien construit un inverse.

Question 1.4. Il s'agissait d'implanter la résolution d'un système linéaire triangulaire. On demandait plutôt du pseudo-code, mais évidemment du code Caml ou tout autre langage était accepté. La plupart des candidats ont su écrire cette fonction.

Question 1.5. Dans cette question et la suivante, on introduisait la notion de limite dans les séries formelles à partir d'un exemple : une itération de Newton pour calculer la racine carrée d'une série unitaire de valuation paire. On avait ici une récurrence non-triviale ou, du moins, qui nécessitait de bien préciser l'hypothèse de récurrence. On a vu des «preuves» en deux temps où chacune des récurrences utilisait le résultat de l'autre, ce qui bien évidemment ne prouve rien. Le plus simple était de prendre une seule hypothèse de récurrence sur l'ensemble des propriétés à démontrer.

Question 1.6. On demandait de construire explicitement la série racine carrée à partir de la suite de séries issues de l'itération de Newton. La plupart des candidats ont bien senti ce qui se passait. C'était d'ailleurs le but de cette question puisqu'on avait choisi de ne pas introduire explicitement la topologie ultramétrique. Toutefois, très peu de candidats ont réussi à formaliser leur intuition pour définir proprement la série $b(z)$ et prouver que son carré était bien la série initiale.

Question 2.1. Avec cette question, on attaquait le sujet des fractions continues. Il s'agissait de démontrer les formules de récurrence classiques donnant le k-ème convergent. Cette question a été modérément réussie : c'est l'exemple typique d'une question d'apparence facile, où l'on arrive à bidouiller des calculs, mais où finalement il faut rédiger très soigneusement la récurrence pour mettre en évidence des subtilités. Par exemple, il était crucial de prendre une hypothèse de récurrence qui portât sur *tous* les convergents d'ordre k et pas seulement ceux de la fraction considérée. Il était important également de préciser que la deuxième fraction continue qu'on introduisait plus ou moins implicitement lors des calculs avait bien les mêmes $(k-1)$ premières valeurs de p_i et q_i que la fraction continue de départ. Les rédactions qui n'ont pas convaincu le correcteur que ces points étaient bien pris en considération ont été sanctionnées.

Question 2.2. Cette question, assez bien réussie dans l'ensemble, a révélé que certains candidats ne se rendaient pas compte de la complexité de leur algorithme. On a par exemple vu plusieurs implantations récursives qui, ne travaillant pas sur des couples de valeurs, se révélèrent de complexité exponentielle.

Question 2.3. Cette question qui se traitait par récurrence a été assez bien réussie. Attention toutefois à ne pas écrire des indices $(k-2)$ en supposant uniquement $k > 0$.

Question 2.4. Les candidats qui ont attaqué cette question l'ont en général résolue, mais là encore il fallait prendre garde à bien rédiger. On pouvait utiliser le critère des séries alternées ou exhiber les suites adjacentes correspondantes mais, dans tous les cas, il ne suffisait pas de montrer la décroissance de $1/q_k q_{k-1}$: il fallait aussi insister sur le fait que q_k tend vers l'infini. On pouvait aussi comparer à la série absolument convergente $\sum 1/n^2$.

Question 3.1. Cette question, relativement simple, avait pour but de familiariser le candidat avec les notions assez peu usuelles utilisées dans la partie 3, et notamment les opérateurs φ et ψ. Notons que plusieurs candidats ont cru relever une erreur d'énoncé dans la définition de ψ, à cause de l'écriture $f_d x^{-d}$; mais il est dit juste avant que d est négatif et donc la définition est correcte. En général, ces mêmes candidats n'ont pas été gênés car ils avaient de toute façon bien compris le sens qu'on donnait à ψ : tronquer la série et la renverser pour en faire un polynôme.

Question 3.2. Avec cette question commençaient les questions plus délicates. Celle-ci a été traitée par environ un candidat sur 5, avec un succès variable. Il fallait mélanger des résultats de la partie 2 avec la notion de limite introduite en partie 1.

Questions 3.3 jusqu'à 3.6. Ces questions relativement difficiles ont été abordées par peu de candidats. Quelques-uns, comme chaque année une poignée de champions très largement au dessus du lot, sont toutefois parvenus à les traiter correctement dans leur quasi-totalité. Notons que les candidats grappilleurs qui ont écrit quelques trivialités à chaque question n'ont pas été récompensés : les quelques quarts de point qu'ils ont pu glaner ont été compensés par la mauvaise disposition du correcteur qui en résulta.

Questions 4.1 jusqu'à 4.4. Mis à part quelques candidats qui ont traité la question 4.1, la partie 4 n'a pas été abordée. Les questions 4.3 et 4.4 étaient certes très difficiles.