Rapport sur l'oral de mathématiques 2006

Oral spécifique E.N.S. Paris : David Harari
Oral commun Paris-Lyon-Cachan : Laurent Berger, Sorin Dumitrescu, Gregory Miermont.

1 Remarques générales sur la session 2006

L'année 2006 restera comme un bon cru en ce qui concerne l'oral spécifique. En particulier, parmi les 118 candidats qui ont passé cet oral, on dénombre très peu de prestations vraiment faibles, et de nombreuses bonnes planches; une dizaine de candidats se sont montrés franchement brillants et ont impressionné le jury. Dans l'ensemble, le cours est bien assimilé et les candidats ont souvent fait preuve d'aisance dans l'utilisation des concepts. Bravo donc à eux, et aussi à leurs professeurs qui les ont préparés tout au long de l'année.

Pour ce qui est de l'épreuve commune, le niveau des candidats était assez hétérogène et les examinateurs ont largement utilisé toutes les notes de 2 à 20. De trop nombreux candidats ont été handicapés par une mauvaise compréhension de leur cours ou un grand manque de recul vis à vis de celui-ci (voir plus bas des exemples précis). D'autre part certains candidats semblaient prendre cet oral commun un peu "à la légère" et y consacrer assez peu de leur énergie. Faire un calcul, démontrer un équivalent, ou devoir séparer trois cas, semblait insurmontablement épuisant pour certains. Il est bon de rappeler aux candidats que malgré son coefficient moins fort que celui des épreuves spécifiques, cet oral reste d'une grande importance, et mérite qu'on y donne beaucoup de soi. Il semble d'ailleurs que les candidats aient parfois tendance à choisir le même jour pour passer leurs deux oraux de mathématiques, et en tout cas plusieurs oraux. Nous en avons ainsi vu qui arrivaient épuisés et en général leur prestation s'en ressentait. Nous ne pouvons donc que conseiller aux candidats d'espacer un minimum leurs oraux dans la mesure du possible.

Enfin nous ne nous étendrons pas trop cette année sur les incohérences du programme, qui gênent parfois les candidats (notamment ceux qui ne viennent pas des "grands" lycées parisiens). Signalons quand même qu'il est assez insensé d'enseigner les propriétés des espaces euclidiens et pas celles des espaces hermitiens, le théorème d'inversion globale et pas celui d'inversion locale, la connexité par arcs et pas la connexité (liste non limitative...). Par exemple démontrer que les valeurs propres d'une matrice antisymétrique réelle sont imaginaires pures pose des problèmes à certains candidats alors que c'est un prolongement naturel du résultat classique sur les matrices symétriques.

2 Commentaires mathématiques d'ensemble

Comme d'habitude les exercices proposés (en particulier à l'oral spécifique) sont souvent volontairement difficiles. Le but est en effet de tester la capacité de réaction des candidats face à un énoncé inattendu, et aussi leur faculté à réflechir et à imaginer dans quelle direction s'orienter. Cette année, beaucoup de candidats à l'oral spécifique avaient bien compris ce que l'on attendait d'eux : ils savaient commencer par des cas particuliers pour comprendre un peu quelle démarche il y avait lieu d'adopter, simplifier le problème pour se ramener à une situation mieux connue, ou encore faire un dessin pour avoir une idée intuitive de la méthode de résolution. Cela a malheureusement nettement moins été le cas à l'oral commun. De façon générale, ceux qui cherchaient dès le début des astuces donnant immédiatement le résultat ont fréquemment été bloqués par la complexité du problème et ont en général moins bien réussi leur oral. Mentionnons aussi la difficulté qu'ont certains candidats à changer une première intuition fausse, malgre la présence sur le tableau d'un contre-exemple évident.

Signalons deux insuffisances fréquemment constatées : certains candidats ont encore du mal avec les quantificateurs (par exemple nier l'assertion "il existe x, y tels que $\mid x-y \mid \leq \alpha$ et $f(x) \neq f(y)$" a posé pas mal de problèmes); d'autre part quand il s'agit de démontrer l'équivalence entre deux propriétés, les candidats se lancent souvent au hasard au lieu de réflechir un minimum pour repérer laquelle des deux assertions est la plus facile à prouver.

En ce qui concerne la forme, nous avons constaté des améliorations (en particulier la raréfaction de la locution "en fait" chez les candidats). Rappelons que le jury apprécie toujours de voir des candidats qui "savent passer un oral" : un tableau bien présenté et bien géré, un débit maîtrisé (ni trop, ni trop peu), et une certaine autonomie dans leur démarche. Voici quelques critiques plus précises :

- Certains candidats écrivent trop petit, comme s'ils passaient une colle avec deux autres personnes, alors qu'il y a toute la place requise au tableau.

- Le candidat peut disposer du tableau à sa guise, et n'a pas besoin de demander sans cesse l'accord de l'examinateur pour l'effacer (une spécialité de cette année...).
- Trop de candidats écrivent un tas de choses (souvent pertinentes) sans dire un mot ni expliquer ce qu'ils font.
- Après un calcul, il est bon de s'écarter pour laisser l'examinateur voir ce qu'on a fait.

3 Commentaires mathématiques de détails

Arithmétique et algèbre.

L'algèbre générale continue d'être en progrès. Visiblement les candidats se préparent maintenant bien mieux à ces sujets, et les grosses lacunes constatées il y a deux ans ont quasiment disparu, ce qui est une belle satisfaction. Curieusement, les candidats ont souvent été surtout bloqués par des calculs élémentaires, notamment dans les exercices sur les polynômes. Par exemple des inégalités telles que $x+\frac{1}{xy}+y \geq 3$ (où x, y sont des réels strictement positifs), ou encore $1+xy \geq x+y$ pour x et y au moins égaux à 1 ont été source de grandes difficultés, les candidats se lançant souvent dans de savantes études de fonctions de plusieurs variables au lieu de regarder si un argument simple ne donnait pas tout de suite le résultat. La question : "montrer que si P est un polynôme de degré 2 de $\mathbf{Q}[X]$, alors il existe un irrationnel x tel que $P(x)$ soit rationnel" a semé la panique. Enfn la notion de fraction rationnelle n'est pas toujours bien comprise, comme le montre le peu de succès qu'a parfois rencontré la question : "montrer que si K est un corps et si $R \in K(X)$ vérifie que R^2 est constante, alors R est constante".

Les candidats ont également été souvent mis en déroute par des calculs très simples avec les nombres complexes : certains ont par exemple perdu beaucoup de temps à retrouver que dans l'expression $z \mapsto az+b$ d'une rotation d'angle θ, le complexe a vaut $e^{i\theta}$, ou encore à calculer $\prod(x-\omega)$, où ω décrit l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. On peut également mentionner les ravages de l'exercice consistant à trouver les affixes des deux derniers sommets d'un carré dont on connaît deux sommets.

En algèbre linéaire, les notions de base sur la diagonalisation sont en général bien comprises. Par contre il y a régulièrement des faiblesses pour formaliser et appliquer correctement les théorèmes du cours à une situation concrète, par exemple quand il faut ramener le problème à un cas simple (matrice trigonale ou diagonale). Certains candidats pensent encore que faire des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice ne change pas sa classe de similitude. D'autres sont effrayés par des calculs simples de polynômes caractéristiques (ou même ne semblent pas très familiers avec cette notion), et ont par exemple des difficultés à déterminer l'ensemble des matrices $(2,2)$ nilpotentes (indication : poser $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et faire le calcul bille en tête n'est pas une bonne idée). A l'oral commun, trouver trois matrices nilpotentes 2×2 linéairement indépendantes a du reste gêné nombre de candidats; d'autres utilisent une méthode de pivot pour inverser une matrice 2×2, alors que dans ce cas la formule générale de la comatrice donne immédiatement le résultat.

Les exercices d'algèbre quadratique ont donné lieu à des prestations très contrastées. Certains maîtrisent parfaitement les notions de base (matrices symétriques, isométries, orthogonalisation de Gram-Schmidt), d'autre pataugent un peu (par exemple un candidat a affirmé que la matrice de passage dans Gram-Schmidt était orthogonale). Il s'agit d'un sujet où il est avant tout essentiel d'avoir une connaissance solide du cours.

Analyse.

Nous avons noté une baisse de niveau surprenante sur les fonctions d'une variable réelle, qui faisaient traditionnellement partie des points forts des candidats. Par exemple montrer que si f est continue, décroissante et positive sur $\mathbf{R}_+$, alors $x \mapsto \int_0^x f - xf(x)$ est croissante a posé bien plus de problèmes que prévu, les candidats cherchant souvent des arguments trop compliqués. Quand il y a une limite à chercher, certains admettent implicitement qu'elle existe sans la moindre justification. Lors de l'oral commun, la question (proche du cours) consistant à montrer que la réciproque d'une fonction strictement croissante continue (sur un intervalle) est continue n'a pas été un succès.

Le calcul différentiel est dans l'ensemble plutôt bien compris, bien qu'il y ait eu les habituelles confusions sur les conditions nécessaires et suffisantes d'extremum, sans doute parce que la notion de matrice symétrique positive ou définie positive n'est pas vraiment assimilée. Les théorèmes fondamentaux sur les équations différentielles sont en général bien connus, même s'il y a parfois un manque d'aisance pour les mettre en pratique. Notons aussi l'insupportable habitude de ne pas indiquer quel est l'indice qui varie quand on manipule une série : les notations du type $\sum_1^n \ldots$ (au lieu de $\sum_{k=1}^n \ldots$) sont des sources de confusion dès qu'il y a un paramètre dans la série; elles sont à éviter.

Les exercices de topologie et géométrie à l'oral spécifique ont été plutôt bien réussis cette année. Les candidats ont en général des connaissances solides et font preuve d'une bonne intuition. C'est plus au niveau de la théorie des ensembles qu'ils ont été gênés (notamment pour traduire correctement qu'une partie est un fermé ou un ouvert relatif). Il y a aussi des confusions quand il s'agit de manipuler différentes normes, notamment en dimension infinie (les candidats parlant par exemple de "fonctions coordonnées" sans réaliser que leur continuité n'est pas automatique dans ce cadre). A l'oral commun, il y a encore eu des insuffisances sur des points proches du cours (par exemple, montrer qu'une application contractante sur un compact admet un point fixe, qu'une forme linéaire est continue en dimension finie, ou encore qu'il n'y a pas de fonction injective et continue de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$).

4 Et pour finir...

...voici comme d'habitude quelques exemples d'exercices posés cette année à l'oral spécifique Ulm :

- Soit X un ensemble fini. Soit θ une application injective et non surjective d'une partie D de X dans X.

  a) On suppose que $\theta(D) \subset D$. Montrer qu'il existe un nombre fini d'applications $p_1, ..., p_n$ de X dans X vérifiant : $p_i \circ p_i = p_i$ pour tout i, et la restriction à D de $p_1 \circ ... \circ p_n$ coïncide avec θ.

  b) Montrer que la conclusion de a) reste vraie sans l'hypothèse $\theta(D) \subset D$.

  c) Soit α une application non bijective de X dans X. Montrer qu'il existe un nombre fini d'applications $\pi_1, ..., \pi_r$ de X dans X vérifiant : $\pi_i \circ \pi_i = \pi_i$ pour tout i, et $\alpha = \pi_1 \circ ... \circ \pi_r$ (théorème de Howie).

- Soit G un groupe (noté multiplicativement). On note D le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$ (avec x, y dans G) et C le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme x^2 ($x \in G$).

  a) Montrer que $D \subset C$.

  b) On suppose que G est engendré par les éléments x qui vérifient $x = x^{-1}$. Montrer que $C = D$.

c) Soit $G = O_2(\mathbf{Q})$ le groupe multiplicatif des matrices $(2,2)$ qui sont orthogonales et à coefficients dans $\mathbf{Q}$. Montrer que dans ce cas D est un sous-groupe strict du groupe $SO_2(\mathbf{Q})$ constitué des matrices orthogonales, à coefficients dans $\mathbf{Q}$, et de déterminant 1.

- Soit K un corps commutatif de caractéristique différente de deux. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ dans K^*. On suppose qu'il existe des fraction rationnelles non toutes nulles $r_1, ..., r_n \in K(X)$ telles que

$$\alpha_1 r_1(x)^2 + ... + \alpha_n r_n(x)^2 = 0$$

Montrer que pour tout polynôme $f \in K[X]$, il existe des polynômes $f_1, ..., f_n$ de $K[X]$ tels que

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x)^2 + ... + \alpha_n f_n(x)^2$$

- Soit $q \in \mathbf{N}^*$, on pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{q}}$.

a) On considère les matrices de $M_q(\mathbf{C})$ suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

et $B = \text{Diag}\,(1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{q-1})$. Calculer $(A+B)^q$.

b) Soient maintenant $n \in \mathbf{N}^*$, et M et N deux matrices de $M_n(\mathbf{C})$ telles que $MN = \omega NM$. Montrer qu'on a $(M+N)^q = M^q + N^q$.

- Soit D un ouvert connexe par arcs non vide d'un e.v.n. réel non nul X. On suppose que l'adhérence de D est compacte. Montrer que si f est une application continue de D dans D telle que $f(D)$ soit un ouvert, alors il existe $x_0 \in D$ tel que

$$d(x_0, \partial D) = d(f(x_0), \partial D)$$

où ∂D désigne la frontière de D.

- Soient f et g deux applications continues, périodiques, non constantes de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On pose $h(x) = f(xg(x))$. Est-il possible que h soit périodique sur $\mathbf{R}$?

- Soit f une application continue, décroissante de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}_+$. On suppose que

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$$

a) On pose $\psi(x) = \int_0^x f(t)dt - xf(x)$. Montrer que ψ est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$, et trouver ses limites en 0 et $+\infty$.

b) On suppose désormais f de classe C^1. Pour $p \in \mathbf{R}$, on note

$$M_p(f) = \int_0^{+\infty} x^p f(x)dx$$

(c'est un élément de $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$). Montrer que si $M_p(f)$ est fini, alors

$$(p+1)M_p(f) = \int_0^{+\infty} x^p \psi'(x)dx$$

c) Soient r, s deux réels avec $0 < r < s$. Montrer que

$$[(1+r)M_r(f)]^{1/r} \leq [(1+s)M_s(f)]^{1/s}$$

- Soient p et q deux fonctions continues d'un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On considère l'équation différentielle

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0 \qquad (1)$$

Soit H l'ensemble des solutions u de (1) sur I qui vérifient $u(x) \geq 0$ pour tout x de I. Soit $[a, b] \subset I$. Montrer qu'il existe des constantes C et D (dépendant de a et b) telles que pour toute u de H, on ait

$$u'(a) \leq Cu(a) \quad u'(b) \geq Du(b)$$

- Soit σ une bijection de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$. Dans cet exercice, on appellera *intervalle* une partie de $\mathbf{N}^*$ de la forme $\{i, i+1, ..., j\}$ avec $i, j \in \mathbf{N}^*$ et $j \geq i$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on écrit l'ensemble $\{\sigma(1), ..., \sigma(n)\}$ comme réunion d'un nombre fini b_n d'intervalles :

$$[c_1, d_1] \cup [c_2, d_2] \cup ... \cup [c_{b_n}, d_{b_n}]$$

tels que pour tout $i < b_n$, on ait $c_{i+1} > d_i + 1$.

Montrer que la suite (b_n) est bornée si et seulement si : pour toute série réelle convergente $\sum_{k\geq 1} a_k$, la série $\sum_{k\geq 1} a_{\sigma(k)}$ converge.