

Rapport du jury concours commun ENS 2007 : MPI & I
Épreuve orale de TIPE de mathématiques

R. Côte, G. Ginot, D. Madore, H. Zaag (examineurs)

L'épreuve de TIPE est commune aux trois ENS. Le candidat dépose, lors de son inscription au concours, un rapport écrit (en trois exemplaires) présentant son travail, et précise quelle en est la discipline dominante (mathématiques, informatique, physique). Le rapport, dont la longueur est d'environ deux à cinq pages, décrit la problématique que le candidat a choisi d'étudier, les outils qu'il a utilisés et les réponses qu'il a apportées ; il doit naturellement être l'œuvre du candidat et non la reproduction d'un ouvrage. Cependant, *ce rapport n'est pas évalué en tant que tel* : il constitue le support sur lequel s'appuiera l'épreuve orale. Il n'a pas pour vocation d'être encyclopédique ni de décrire toutes les connaissances de son auteur dans un domaine donné : il est donc inutile, même nuisible, de présenter des textes très longs que les examinateurs ne pourront pas étudier correctement, ou d'y adjoindre des annexes pléthoriques (et — à plus forte raison — les pièces supplémentaires présentées le jour de l'épreuve ne seront pas prises en considération).

L'oral proprement dit dure 40–45 minutes. Le candidat est invité à présenter son travail, en abordant rapidement le contenu mathématique : le jury interrompt rapidement cet exposé pour vérifier la compréhension des concepts utilisés ou pour proposer des exercices courts en rapport avec le sujet traité. L'usage de transparents¹ illustratifs est autorisé mais nullement impératif ; il est cependant inutile de reproduire sous cette forme le contenu du rapport que le jury aura de toute façon sous les yeux.

L'épreuve de TIPE de mathématiques est, avant tout, une épreuve de mathématiques. *Le premier critère d'évaluation est donc la bonne maîtrise du contenu mathématique de l'étude.* Les sujets pluridisciplinaires sont les bienvenus, comme le sont les considérations d'ordre empirique et expérimental, ou les implémentations informatiques, mais le candidat doit être à même de les relier à une analyse mathématique (par exemple, d'un cas simplifié). Le soin apporté à d'autres

¹À ce propos, nous rappelons que les règles de l'épreuve de TIPE à certains autres concours imposent la destruction des documents qui y sont apportés — ce n'est pas le cas aux ENS — et qu'il faut donc veiller à ne pas être pris au dépourvu en n'ayant plus aucun support de présentation.

éléments du rapport ne peut en aucun cas remédier à l'insuffisance de contenu mathématique que nous avons constaté dans certains travaux.

En particulier, nous attirons l'attention du candidat sur l'*importance du choix de la discipline* dans laquelle il présentera son TIPE (mathématiques, informatique ou physique) et qui conditionne le jury qui l'écouterait : un thème comme la multiplication rapide, la logique linéaire ou la compression vidéo aurait peut-être été plus avantageusement présenté en informatique. Il vaudrait mieux ne pas se poser cette question à la dernière minute : *on attend dans tous les cas que le travail ait un contenu scientifique sérieux dans la discipline en question.*

L'épreuve de TIPE a la particularité de permettre au candidat de choisir le thème sur lequel il sera interrogé. En contrepartie, le jury attend de sa part une bonne compréhension de ce sujet et des outils mathématiques employés pour le traiter.

Il va de soi qu'on ne suppose du candidat *a priori* aucune connaissance au-delà du programme des classes préparatoires, et nous lui conseillons de rester autant que possible dans ce cadre, ne s'en écartant que si c'est nécessaire au sujet choisi.

En revanche, la maîtrise des concepts avec lesquels on prétend avoir travaillé est indispensable. Au minimum, pour chaque terme introduit on peut s'attendre à ce que le jury soit susceptible de demander un exemple ou un contre-exemple, ou de faire vérifier la définition dans un cas simple, et ces questions ne doivent pas laisser au dépourvu. S'agissant d'un théorème, le candidat doit être capable, si on le lui demande, d'exposer les idées-clés de sa démonstration sans entrer dans les détails, ou d'expliquer en quoi il est pertinent et en quoi les hypothèses sont nécessaires. Il n'est bien sûr pas défendu d'admettre une démonstration mais on devra au moins avoir une idée de sa difficulté (de même qu'on pourra omettre la définition d'un objet à condition d'être capable de citer précisément les propriétés qui serviront).

À titre d'exemple, mentionnons les domaines très populaires — et pourtant risqués — que sont la théorie de Galois et les probabilités. Il est regrettable que les candidats soient souvent incapables, après avoir formulé la définition d'une extension normale de corps, d'en fournir un contre-exemple ou, après avoir parlé du groupe de Galois d'une telle extension, de calculer celui de $\mathbb{Q}(e^{2i\pi/3})$ sur \mathbb{Q} (voire, avec un peu d'aide, de $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{7})$). Concernant les probabilités, on ne demande pas au candidat qui en parle de savoir nécessairement définir très précisément une tribu, mais on souhaite que celui qui traite des chaînes de Markov puisse donner la formule calculant la probabilité conditionnelle $P(A|B)$ et connaisse la notion d'indépendance d'événements ou de variables aléatoires (puisque ces concepts figurent dans son rapport !). Or il s'avère que le vocabulaire des probabilités est particulièrement malmené, et on assiste même à des confusions entre $A \cap B$ et $A \cup B$.

De même, évoquer les fonctions holomorphes pour étudier les applications

conformes et ne pas s'être aperçu que les similitudes directes du plan sont précisément les $z \mapsto az + b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$ montre un réel manque de recul par rapport au sujet proposé, comme le fait de parler de polynômes sur les corps finis sans avoir pris conscience du fait qu'un polynôme irréductible $f \in \mathbb{F}_p[t]$ qui acquiert une racine dans \mathbb{F}_{p^r} les acquiert toutes.

Nous mettons spécialement en garde les candidats contre la tentation d'aborder des sujets très ambitieux et par conséquent mal maîtrisés : parler de relativité générale et de courbure de l'espace-temps permet difficilement de faire l'économie de notions de géométrie différentielle qui ne sont pas normalement à la portée d'un élève de classes préparatoires, et on s'aperçoit concrètement que calculer la métrique d'une sphère présente de réelles difficultés.

Parmi les notions au programme dont nous avons constaté qu'elle sont mal comprises, on peut citer la différentielle d'une application de \mathbb{R}^m vers \mathbb{R}^n (plus d'un candidat découvre avec étonnement que la différentielle d'une application linéaire est en tout point cette application elle-même) ou bien le théorème de Cauchy-Lipschitz (qu'on ne sait souvent pas traduire comme propriété des trajectoires d'une équation autonome).

Nous avons en outre constaté des difficultés des candidats à formaliser en termes mathématiques des concepts dont ils ont une compréhension intuitive : par exemple l'idée de « fabriquer un graphe constitué de N copies d'un graphe donné » ou de « considérer des données formées d'un automorphisme de X et d'un automorphisme de Y » n'évoquait pas forcément le produit cartésien de deux ensembles. La notion de graphe semble d'ailleurs avoir particulièrement posé des difficultés à formaliser : nous rappelons qu'il existe toutes sortes de variantes de cette notion (graphes orientés ou non, admettant ou non une arête d'un sommet à lui-même, admettant ou non plusieurs arêtes entre les deux mêmes sommets, planaires ou non voire plongés dans le plan, etc.), et qu'il est important qu'on sache exactement à quoi on à affaire.

Nous pensons de façon générale qu'il est possible de trouver des thèmes riches et originaux sans s'éloigner beaucoup du programme.

À titre d'exemple, voici quelques-uns des thèmes les plus fréquents dans lesquels s'inscrivent les sujets que nous avons rencontrés cette année :

- études d'équations différentielles : stabilité, stabilité structurelle, exemples concrets tels que Lotka-Volterra, propagations d'épidémies, résolution numérique, théorème de Poincaré-Bendixson, etc. ;
- systèmes dynamiques : fonction logistique, doublement de l'angle, ergodicité, fractales... ;
- équations aux dérivées partielles : équation de la chaleur, équation de transport (p.ex. modélisation du trafic routier) ;
- chaînes de Markov, marches aléatoires, mouvement brownien, équations

- différentielles stochastiques ;
- théorie de Galois : résolubilité par radicaux, constructions à la règle et au compas (ou à l’origami), division du cercle (ou de la lemniscate) ;
- corps finis : polynômes, factorisation, codes correcteurs ;
- théorie analytique des nombres : séries de Dirichlet, fonctions ζ et fonctions L ;
- divers aspects de l’étude du groupe modulaire $PSL_2(\mathbb{Z})$;
- calcul des variations, équations d’Euler-Lagrange, problème de la brachistochrone ;
- cartographie, surfaces, applications conformes ;
- programmation linéaire et théorie des jeux ;
- gammes musicales ou construction de calendriers, approximation diophantienne et fractions continuées ;
- transformée de Fourier discrète, et ses applications comme la compression d’images ou la multiplication rapide ;
- quelques aspects de l’étude mathématique de la relativité restreinte ou générale ;
- automates cellulaires (souvent en lien avec une autre modélisation d’un même phénomène) ;
- théorie des graphes ;
- topologie algébrique (notamment sous l’angle de l’homotopie).

Finissons par quelques remarques sur la forme. Les rapports écrits nous ont semblé, dans l’ensemble, soignés et d’un bon niveau, généralement agréables à lire. C’est le signe que l’épreuve est prise au sérieux et travaillée pendant la période (pourtant chargée) de la prépa. Il est appréciable de voir une véritable bibliographie² figurer en fin du rapport. Il nous est cependant arrivé de découvrir que l’intégralité du contenu d’un exposé était presque recopiée d’un livre (tel que *The Art of Computer Programming* de D. Knuth) qui n’était même pas cité en référence : cela donne une impression défavorable sur le travail mené.

Pendant l’exposé oral, l’utilisation du tableau laisse souvent à désirer : certains attendent apparemment qu’on leur dicte quoi écrire (voire où) et ne prennent pas l’initiative de noter les points importants du raisonnement. À l’inverse, on apprécie beaucoup de voir un candidat capable de résumer une partie de son travail, une démonstration importante, ou les propriétés d’un concept, en quelques points clairement énoncés et synthétisés par écrit.

Le jury a parfois orienté son interrogation dans le sens de faire découvrir au

²Rappelons à ce sujet qu’un article scientifique doit être cité en indiquant les auteurs, le titre, le nom de la revue où il est paru, le volume, l’année, et les pages de début et de fin ; quant à un livre, il ne faut pas oublier d’en préciser l’éditeur et l’année. Pour un article de Wikipédia, il convient de donner le titre exact et la langue d’édition.

candidat une propriété ou une idée adjacente à celles contenues dans le rapport (ainsi, à un candidat présentant un sujet sur la cartographie conforme nous avons cherché à faire voir que la projection stéréographique peut être vue comme une exponentielle complexe de la projection de Mercator ; à un autre qui traitait de relativité restreinte nous avons fait calculer les relations fondamentales du triangle hyperbolique comme formules de composition des vitesses en relativité). Il ne faut bien sûr pas interpréter cette ligne d'interrogation comme le reproche d'une lacune dans le travail effectué, mais bien comme une invitation à la curiosité intellectuelle même au cours de l'épreuve : nous avons ainsi pu mesurer combien certains étaient réellement intéressés par le sujet qu'ils avaient étudié.

Pour finir, nous tenons à remercier ceux qui, par le recul qu'ils ont pris sur la question qu'ils étudiaient, le niveau de leur travail et la qualité de leur exposé, nous ont donné l'occasion d'avoir un échange d'un réel intérêt scientifique.

Coefficients :

Ulm : 8/111 (MPI), 1/30 (I)

Lyon : 1.5/32.5 (MPI), 1.5/30.5 (I)

Cachan : 2/51 (MPI), 2/49 (I)