
ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHS-INFO

CONCOURS INTER-ENS

MEMBRES DE JURYS : N. Brisebarre, V. Cortier et G. Schaeffer

Comme indiqué dans l'introduction, le sujet portait sur l'étude de structures combinatoires et algébriques associées aux graphes : en particulier la matrice Laplacienne d'un graphe et son groupe critique sont abordés sous l'angle algébrique (manipulation d'espaces vectoriels, de groupes abéliens) ; puis une partie plus combinatoire traite d'un système de réécritures associé au groupe critique ; enfin la quatrième et dernière partie est consacrée à des questions de complexité algorithmique du calcul dans ce groupe.

Plus précisément la première partie permettait de rentrer dans le bain en rattachant les notions utiles de théorie des graphes à des notions supposément plus familières aux candidats, de matrices, d'espaces vectoriels, de rang et de famille libre de vecteurs. En particulier on y obtenait la caractérisation de la connexité d'un graphe par le rang de sa matrice Laplacienne. Les outils mis en œuvre mêlent ici un peu de combinatoire à des calculs élémentaires de vecteurs et valeurs propres de matrices. Ces résultats forment le tout début de la théorie algébrique des graphes et sont fort classiques.

La seconde partie entrait dans le vif du sujet avec la définition du groupe critique d'un graphe. La notion de groupe n'étant pas au programme de cette épreuve le sujet procédait tranquillement avec un certain nombre de vérifications élémentaires pour arriver à la finitude du groupe critique et à son indépendance vis-à-vis du sommet racine. Cette notion de groupe critique d'un graphe a été étudiée dans des contextes assez variés depuis une vingtaine d'années et porte différents noms dans la littérature : groupe de Picard, groupe du tas de sable abélien, groupe du jeu des jetons (chip firing game), etc.

La troisième partie porte sur la représentation du groupe critique dans le modèle du tas de sable abélien : ce modèle se décrit informellement en termes d'éboulements de configurations de grains de sable disposés sur les sommets du graphe, mais se formalise plus précisément en termes de règles de réécriture sur les vecteurs de \mathbb{Z}^n . L'étude combinatoire des propriétés de ces réécritures conduit à associer à chaque élément du groupe critique une configuration *récurrente* et à décrire la loi d'addition du groupe critique en terme de ces configurations. La terminologie de configuration récurrente, un peu mystérieuse dans le sujet, vient de ce que ces configurations sont en effet les configurations récurrentes de la chaîne de Markov sur les configurations de grains dont les transitions correspondent à l'ajout d'un grain au hasard dans le graphe suivi d'une avalanche.

Enfin la dernière partie, dont les développements sont de nature plus algorithmique, mène à une preuve constructive de l'existence d'une bijection entre les configurations récurrentes d'un graphe et ses arbres couvrants, en passant par l'analyse de la complexité de l'addition dans le groupe.

Remarques générales

Le sujet était long au regard du temps imparti. La notation en a bien entendu tenu compte. La plupart des copies se contentent de traiter les deux premières parties, ce qui

suffit pour certaines à obtenir une très bonne note. La troisième partie a été abordée par une moitié des copies, avec plus ou moins de bonheur, la quatrième à peine effleurée.

Comme à l'accoutumée un certain nombre de candidats cherchent à grappiller des points en abordant quelques questions faciles dans chaque partie. Il faut bien comprendre que ces questions faciles sont là pour aider les candidats à rentrer dans le sujet et à s'appropriier les notions manipulées mais qu'elles rapportent très peu de points. L'autre tactique consistant à écrire de longues discussions vagues terminant par l'affirmation d'avoir répondu à la question ne trompe personne et conduit en général à irriter le correcteur. La valeur d'une preuve un peu succincte ou un peu confuse en fin de copie dépend beaucoup de la confiance que le candidat a su susciter chez le correcteur au fil des pages, en se montrant précis et honnête dans ses réponses : une preuve rapide à la 5ème page d'une copie rigoureuse et concise sera probablement lue différemment de la même preuve à la suite de 15 pages de baratin inconsistant. De la rigueur donc, et de la concision.

Questions détaillées

Les paragraphes suivants commentent les réponses données aux questions les plus traitées.

Question 1.1 Cette question d'échauffement a été quasi unanimement bien traitée...

Question 1.2 Plus de la moitié des candidats échouent à obtenir l'expression de λ . La troisième partie de la question était certes un peu vague mais quoi qu'il en soit il vaut toujours mieux ne pas répondre que de se lancer dans des digressions incohérentes.

Question 1.3 La première partie de la question a été assez bien traitée sauf que trop de candidats se contentent d'un sens de la double inclusion nécessaire à la preuve. Le lien entre nombres de composantes connexes et rang a été vu par de nombreux candidats mais énoncé souvent sans preuve.

Question 1.4 La première relation demandée était identique à celle de la question 1. Un certain nombre de candidats en ont semble-t-il déduit que la seconde relation demandée serait, elle aussi, la même qu'à la question 2.

Question 1.5 L'énoncé était ici un peu piégeux : la matrice dont les lignes sont données par les Δ_i , $i \neq k$, et x_k n'est pas exactement $\Delta_{G,k}$ (comparer les k èmes colonnes). Quelques candidats ont été suffisamment attentifs pour le voir.

Question 1.6 Les candidats qui ont traité cette question l'ont en général bien fait. Bien qu'il était précisé que cette question était indépendante des autres questions de la partie, peu de candidats s'y sont intéressés.

Questions 2.1, 2.3 et 2.4 Ce type de questions appelle des réponses précises mais concises : une ligne par propriété suffit à montrer qu'on a bien vérifié toutes les conditions ; pas la peine de s'étendre sur une demi-page lorsque la propriété est immédiate. (*A contrario* ne pas se contenter de dire « c'est trivial » comme il est parfois fait dans le corrigé succinct ci-dessous.) La seule propriété qui pouvait poser problème est la définition de la somme dans le groupe quotient (Question 2.4) : seul un petit cinquième des candidats vérifient que la somme est bien définie (indépendante des représentants choisis), les autres ne marquant aucun point pour cette question.

Question 2.2 Cette question n'a été résolue que par un petit quart des candidats bien qu'on ait déjà montré (mais il est vrai à la partie précédente) que la matrice des Δ_i est de rang $n - 1$.

Question 2.5 Cette question était la première question vraiment difficile du sujet. Une petite trentaine de candidats s'y essayent, pour plus de la moitié avec succès.

Question 2.6 Comme à la question 2.4 de trop nombreux candidats passent à côté de la difficulté en s'étendant longuement sur la propriété de morphisme sans définir correctement le morphisme entre groupes quotients (indépendance aux représentants choisis).

Question 2.7 Une autre question sérieuse du sujet. Une bonne moitié des candidats tentent une définition de φ suivant l'indication et comprennent qu'il faut utiliser la question précédente, mais une petite quinzaine de candidats seulement réussissent à ne pas s'emmeler les pinceaux.

Question 3.1 La moitié des candidats environ abordent cette question, un petit quart d'entre eux en ayant sauté les questions intéressantes de la partie 2. Las, comme toutes les questions faciles, celle-ci ne rapporte pas grand chose et le grapillage ne paye pas.

L'énoncé présentait au paragraphe suivant une incohérence dans la définition de configuration stable : alors qu'il est dit que stable \Leftrightarrow aucun sommet ne peut s'écrouler, la traduction en formule est mal écrite $u_i \leq d_i$ au lieu de $u_i < d_i$. Cette erreur ne portait pas immédiatement à conséquence (plutôt dans la partie 4) mais quelques candidats ont tout de suite remarqué et corrigé.

Question 3.2 Une vingtaine de candidats obtiennent des points sur l'une ou l'autre partie de la question mais deux ou trois candidats comprennent ce qui se passe : il n'était pas forcément facile de penser à l'ordre lexicographique, mais le seul fait de proposer une stratégie raisonnable (faire baisser le potentiel pour montrer que la terminaison de la réécriture) a été récompensé ; très peu de tentatives ont été faites sur l'unicité.

Question 3.3 Un certain nombre de candidats viennent grapiller quelques pouillèmes de points à la question (a). Le (b) a fait l'objet de quelques tentatives intéressantes, quelques candidats remarquant même qu'il manquait une hypothèse de connexité du graphe privé du puits.

La suite du sujet n'a été traitée qu'assez rarement, hormis encore quelques tentatives avortées de grapiller des points et quelques copies remarquables.

CORRIGÉ SUCCINCT DU SUJET

Le sujet porte sur l'étude de structures combinatoires et algébriques associées aux graphes. La première partie traite de quelques propriétés de la matrice Laplacienne. La seconde partie étudie une structure algébrique naturellement associée à un graphe, son groupe critique. La troisième partie porte sur l'étude d'un système de réécriture sur le graphe qui conduit à une représentation combinatoire du groupe critique. La quatrième et dernière partie est consacrée à des questions de complexité du calcul dans cette représentation.

Le sujet progresse au fil des parties et il est conseillé de les aborder dans l'ordre. Par contre il est bien entendu permis d'utiliser les résultats des questions précédentes sans y avoir répondu.

PARTIE 1 : Matrice d'incidence et matrice Laplacienne d'un graphe

Un graphe G est formé d'un ensemble fini X de sommets, qu'on prendra, sauf mention explicite du contraire, égal à $X_n = \{1, \dots, n\}$, et d'un ensemble E de paires non ordonnées de sommets appelées les arêtes. On représente graphiquement un graphe en associant les sommets à des points distincts du plan et en traçant des arcs joignant les paires de sommets qui forment des arêtes. Le graphe $G_0 = (X, E)$ avec $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}\}$ est représenté à la figure 1, ainsi que le graphe cycle C_6 et le graphe roue W_5 .

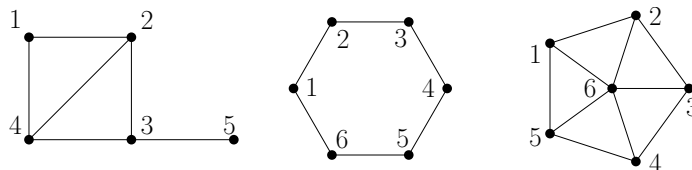


FIGURE 1 – Trois graphes : G_0 , C_6 et W_5

L'arête $\{i, j\}$ est dite incidente aux sommets i et j et dans ce cas les sommets i et j sont dits adjacents. Le degré d_i du i ème sommet est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes. La matrice d'incidence d'un graphe $G = (X, E)$ à n sommets et m arêtes ordonnées est la matrice $L_G = (\ell_{i,j})$ de taille $n \times m$ avec

$$\ell_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si la } k\text{-ème arête est } \{i, j\} \text{ avec } i < j, \\ -1 & \text{si la } k\text{-ème arête est } \{j, i\} \text{ avec } j < i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice d'adjacence complétée ou matrice Laplacienne du graphe G est la matrice symétrique $\Delta_G = (e_{i,j})$ de taille $n \times n$ avec

$$e_{i,j} = \begin{cases} d_i & \text{si } j = i, \\ -1 & \text{si } j \neq i \text{ et les sommets } i \text{ et } j \text{ sont adjacents,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour le graphe G_0 de la figure 1 on a

$$L_{G_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{G_0} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 1.1. Montrer que pour tout G , $\Delta_G = L_G^t L_G$ où ${}^t L_G$ désigne la matrice transposée de L_G .

Soit $e'_{i,j} = \sum_{k=1}^m \ell_{i,k} ({}^t \ell)_{k,j} = \sum_{k=1}^m \ell_{i,k} \ell_{j,k}$ l'entrée (i, j) de la matrice produit. Si $j \neq i$, par définition de L_G , $\ell_{i,k} = -\ell_{j,k} = \pm 1 \neq 0$ si et seulement si la k -ième arête joint les sommets i et j , autrement dit si les sommets i et j sont adjacents; comme au plus une arête joint i et j , on a alors dans ce cas $e'_{i,j} = -1 = e_{i,j}$, et $e'_{i,j} = 0 = e_{i,j}$ sinon. Si $j = i$ alors pour chaque arête k incidente au sommet i on obtient une contribution $(\ell_{i,k})^2 = 1$, de sorte que $e'_{i,i} = d_i = e_{i,i}$.

Question 1.2. Montrer que si un réel λ et un vecteur colonne $v \neq 0$ satisfont $\Delta_G v = \lambda v$ alors $\lambda = \|{}^t L_G v\|^2 / \|v\|^2$ et en déduire $\lambda = \sum_{\{i,j\} \in E} (v_i - v_j)^2 / \sum_i v_i^2$ où $v = (v_i)_{i=1}^n$. Commentez le fait que les valeurs propres de Δ_G soient réelles positives.

Supposons $\Delta_G v = \lambda v$ et multiplions à gauche par le vecteur ligne ${}^t v$: on obtient d'un côté ${}^t v \Delta_G v = ({}^t L_G) {}^t L_G v = {}^t ({}^t L_G v) \cdot ({}^t L_G v) = \|{}^t L_G v\|^2$ et de l'autre $\lambda {}^t v \cdot v = \lambda \|v\|^2$ et l'expression de λ .

Par ailleurs, pour tout $k = 1, \dots, m$, $({}^t L_G v)_k = v_i - v_j$ si la k ème arête est $\{i, j\}$ avec $i < j$. D'où $\|{}^t L_G v\|^2 = \sum_{\{i,j\} \in E} (v_i - v_j)^2$.

La matrice Δ_G étant réelle et symétrique il est normal que ses valeurs propres soient réelles. Le fait que $\Delta_G = L_G {}^t L_G$ donne de plus la positivité des valeurs propres.

Un chemin de longueur k du sommet x au sommet y du graphe G est une suite u_0, u_1, \dots, u_k de sommets avec $u_0 = x$, $u_k = y$ et telle que $\{u_{i-1}, u_i\} \in E$ pour tout $i = 1, \dots, k$. S'il existe un chemin de x à y dans G on dit que x et y sont connectés dans G . La relation être connectés est une relation d'équivalence sur les sommets de G et on appelle composantes connexes de G ses classes d'équivalences. Le graphe G est connexe s'il n'a qu'une composante connexe, autrement dit s'il existe un chemin entre toute paire de sommets de G .

Question 1.3. Montrer que si le graphe G est connexe alors $\ker(\Delta_G) = \{v \mid \Delta_G v = 0\}$ est le sous-espace vectoriel engendré par $e = {}^t(1, \dots, 1)$. En déduire dans ce cas que le rang de Δ_G est $n - 1$. Plus généralement donner une formule qui lie le rang de Δ_G au nombre de composantes connexes de G .

Au vu de la question précédente les vecteurs de $\ker(\Delta_G)$ satisfont $\sum_{\{i,j\} \in E} (v_i - v_j)^2 = 0$, où encore $v_i = v_j$ pour toute arête $\{i, j\}$. On en déduit que si $v \in \ker(\Delta_G)$ alors les coordonnées de v sont constantes sur chaque composante connexe de G . Inversement si v est un vecteur tel que pour toute arête $\{i, j\}$ on ait $v_i = v_j$, alors on a immédiatement ${}^t L_G v = 0$ et *a fortiori* $\Delta_G v = 0$.

La dimension de $\ker(\Delta_G)$ est donc égale au nombre de composantes connexes de G et plus précisément, si (C_1, \dots, C_c) est une partition des sommets de G en composantes connexes et $\chi(C_q)$ est le vecteur caractéristique de la q ème composante (où $(\chi(C_q))_i = 1$ si $i \in C_q$, 0 sinon), alors $\ker(\Delta_G)$ est engendré par les vecteurs $\chi(C_1), \dots, \chi(C_c)$.

Dans le cas où G est connexe le rang de la matrice Δ_G est bien $n - 1$ et $\chi(C_1) = {}^t(1, \dots, 1)$. Plus généralement le rang de Δ_G est $n - c$ où c est le nombre de composantes connexes de G .

On va montrer que les résultats précédents restent vrais si on remplace L_G par $L_{G,k}$ la matrice $n \times (m + 1)$ dont les lignes $i \neq k$ sont les lignes de L_G augmentée d'un 0 en colonne $m + 1$ et la ligne k est une ligne de zéro terminée par un 1 en colonne $m + 1$, et Δ_G par $\Delta_{G,k}$ la matrice $n \times n$ formée à partir de Δ_G en remplaçant la k ème ligne et la k ème colonne par les k ème ligne et k ème colonne d'une matrice identité $n \times n$.

Question 1.4. Donner une relation analogue à celle de la question 1 entre $L_{G,k}$ et $\Delta_{G,k}$, et une relation analogue à celle de la question 2 entre une valeur propre λ de $\Delta_{G,k}$ et un éventuel vecteur propre v non nul. En déduire que si le graphe G est connexe alors $\Delta_{G,k}$ est de rang n .

On a toujours $L_{G,k} {}^t L_{G,k} = \Delta_{G,k}$ d'où $\lambda \|v\|^2 = \|{}^t L_{G,k} v\|^2$. Cette fois on obtient :

$$\lambda \sum_i v_i^2 = \sum_{i,j|k \notin \{i,j\} \in E} (v_i - v_j)^2 + \sum_{i|\{i,k\} \in E} v_i^2 + v_k^2.$$

On considère à nouveau un vecteur v de $\ker(\Delta_{G,k})$: on a immédiatement $v_k = 0$ et $v_i = 0$ pour tout i voisin de k dans G , ainsi que $v_i = v_j$ pour tout $\{i, j\} \in E$, de sorte que la nullité des coordonnées se propage à tous les sommets par connexité. On en déduit que l'application linéaire $\Delta_{G,k}$ est injective et que la matrice $\Delta_{G,k}$ est de rang n .

On note x_1, \dots, x_n les n vecteurs de la base canonique de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n : x_i a toutes ses coordonnées nulles sauf la i ème égale à 1. On pose $\Delta_i = d_i x_i + \sum_{j \neq i} e_{i,j} x_j$, le vecteur dont les coordonnées dans la base canonique sont données par la i ème ligne de Δ_G .

Question 1.5. Dédurre des résultats précédents que si le graphe est connexe la famille $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\} \setminus \{\Delta_k\} \cup \{x_k\}$ est une famille libre de vecteurs de \mathbb{R}^n , quel que soit k .

La matrice des coordonnées de ces vecteurs dans la base des x_i est obtenue à partir de $\Delta_{G,k}$ dont on a montré qu'elle est de rang n , en ajoutant la k -ème ligne à toutes les lignes i telles que i soit voisin de k dans G . Ces opérations ne modifient pas le rang de la matrice.

La question suivante est indépendante des précédentes et termine cette partie préliminaire.

Question 1.6. Soit A une matrice carrée $n \times n$ inversible et a un vecteur, tous deux à coefficients entiers. Notons v l'unique solution du système d'équations linéaires $Av = a$. Montrer que le vecteur v s'écrit sous la forme $(v'_1/\delta + v''_1, \dots, v'_n/\delta + v''_n)$ avec les v'_i , les v''_i et δ entiers et $0 \leq v'_i < \delta$ pour tout i .

Immédiat en vertu des formules de Cramer, avec $\delta = \det(A)$.

PARTIE 2 : Le groupe critique d'un graphe

On considère dans tout le reste du sujet un graphe connexe $G = (X_n, E)$ de matrice Laplacienne $\Delta_G = (e_{i,j})$ de taille $n \times n$, telle que définie à la partie précédente. En particulier pour $i \neq j$, $e_{i,j} = -1$ si $\{i, j\} \in E$ et 0 sinon, et $d_i = e_{i,i}$ est le degré du sommet i .

Un groupe abélien K est un ensemble muni d'une loi interne, notée $+$, associative, commutative, admettant un élément neutre et telle que chaque élément de K ait un inverse. Un sous-groupe H de K est un sous-ensemble de K stable pour la loi interne $+$ et qui forme lui-même un groupe. Étant donnés des éléments g_1, \dots, g_k de K , le sous-groupe de K engendré par les g_i , noté $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$, est le plus petit sous-groupe de K les contenant.

Question 2.1. Montrer que $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ est formé de tous les éléments de K qui s'écrivent $\sum_{i=1}^k a_i g_i$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$.

Les combinaisons linéaires à coefficients entiers des g_1, \dots, g_k forment un groupe et sont contenues dans le sous-groupe engendré par ces éléments.

On sera attentif à ne pas confondre la notion de sous-groupe engendré par des éléments d'un groupe abélien avec la notion d'espace vectoriel réel engendré par des vecteurs d'un espace vectoriel : dans le premier cas on forme des sommes et différences de vecteurs, qui se réécrivent comme combinaisons linéaires mais à coefficients entiers, alors que le second cas on forme toutes les combinaisons linéaires à coefficients réels.

Par exemple, l'ensemble \mathbb{R}^n peut-être vu comme un groupe pour la loi usuelle d'addition des vecteurs, et le sous-ensemble \mathbb{Z}^n des vecteurs à coordonnées entières en est le sous-groupe $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ engendré par les vecteurs de la base canonique. Ce sous-groupe \mathbb{Z}^n est bien différent du sous-espace vectoriel engendré par les mêmes vecteurs x_1, \dots, x_n (qui est \mathbb{R}^n tout entier).

On note $\Delta(G, k)$ le sous-groupe de \mathbb{Z}^n engendré par le vecteur x_k et les Δ_i pour $i = 1, \dots, n$, définis comme à la partie précédente par $\Delta_i = d_i x_i + \sum_{j \neq i} e_{i,j} x_j$.

Question 2.2. Montrer que $\Delta(G, k)$ est engendré par x_k et n'importe quel sous-ensemble de $n - 1$ des Δ_i .

Par définition, $\Delta(G, k)$ est engendré par x_k et les Δ_i , de sorte que tout élément de $\Delta(G, k)$ s'écrit $z = a_0 x_k + \sum_{i=1}^n a_i \Delta_i$, avec $a_i \in \mathbb{Z}$. Il suffit de remarquer la relation $\sum_i \Delta_i = 0$ pour écrire $z = a_0 x_k + \sum_{i \neq \ell} (a_i \Delta_i - a_\ell \Delta_i)$.

Deux éléments x et y d'un groupe abélien K sont dits équivalents relativement au sous-groupe H si $x - y \in H$.

Question 2.3. Montrer que la relation d'équivalence relativement à un sous-groupe est bien une relation d'équivalence.

Il faut vérifier réflexivité, symétrie, et transitivité, toutes 3 évidentes.

L'ensemble des classes d'équivalences pour la relation d'équivalence relativement à un sous-groupe est noté K/H et appelé le quotient de K par H . La classe d'équivalence de x relativement à H est notée x/H , ou plus simplement \bar{x} lorsque H est clair. Dans chaque classe d'équivalence de K relativement à H on choisit arbitrairement un élément qu'on appelle le représentant de la classe et on définit la somme de deux classes d'équivalence comme la classe d'équivalence de la somme de leurs représentants.

Question 2.4. Montrer que l'opération de somme décrite ci-dessus munit K/H d'une structure de groupe abélien.

Là encore les vérifications, existence du neutre, associativité, commutativité et existence de l'inverse, sont évidentes mais il importe de bien montrer l'indépendance des calculs effectués vis à vis des représentants choisis.

On définit le groupe critique $C(G, k)$ du graphe G enraciné en k comme le quotient $\mathbb{Z}^n / \Delta(G, k)$.

Question 2.5. Montrer que $C(G, k)$ est un groupe de cardinal fini.

On a montré que $\{x_k\} \cup \{\Delta_i \mid i \neq k\}$ est libre et donc est une base de \mathbb{R}^n . Tout vecteur x de \mathbb{Z}^n s'écrit donc dans cette base $x = \lambda_0 x_k + \sum_{i \neq k} \lambda_i \Delta_i$: les coefficients λ_i peuvent donc être vus comme solutions d'un système d'équations linéaires à coefficients entiers, qui s'écrivent par les formules de Cramer comme des rationnels de dénominateur $\det(\Delta_{G,k})$. On peut alors écrire $x = \{\lambda_0\}x_k + \sum_{i \neq k} \{\lambda_i\}\Delta_i + [x]$, où $\{u\}$ désigne la partie fractionnaire de u et $[x] = [\lambda_0]x_k + \sum_{i \neq k} [\lambda_i]\Delta_i \in \Delta(G, k)$. Les $\{\lambda_i\}$ étant des rationnels de la forme p/q avec $0 \leq p < q < \det(\Delta_{G,k})$, le nombre de classes d'équivalence relativement à $\Delta(G, k)$ est fini.

Deux groupes K, K' sont isomorphes (on écrit $K \sim K'$) s'il existe un isomorphisme de groupe entre K et K' , c'est-à-dire une bijection φ de K sur K' telle que $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Question 2.6. Montrer que si φ est un isomorphisme de groupe entre K et K' , et H est un sous-groupe de K alors $K/H \sim K'/\varphi(H)$.

L'image d'une classe \bar{x} d'équivalence de K respectivement à H est la classe de l'image d'un représentant de \bar{x} par φ et cette définition ne dépend pas du représentant choisi. On vérifie que l'application $\bar{\varphi}$ ainsi définie est bijective et satisfait immédiatement la propriété de morphisme.

Question 2.7. Montrer que $C(G, k) \sim C(G, \ell)$ pour tout k, ℓ . Indication : on pourra considérer les $\Delta'_i = \Delta_i - e_{i,k}x_\ell$ pour tout i , les vecteurs $y_i = x_i - x_k$ pour $i \neq k$ et $y_k = -x_\ell$, et l'application $\varphi(x_i) = y_i$ pour tout i .

L'application φ définie par $\varphi(x_i) = y_i$ s'étend immédiatement en un automorphisme de \mathbb{Z}^n . On vérifie ci-dessous que $\varphi(\Delta_i) = \Delta'_i$ de sorte que $\varphi(\langle x_k, \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle) = \langle y_k, \Delta'_1, \dots, \Delta'_n \rangle = \langle x_\ell, \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$: comme φ est un automorphisme de \mathbb{Z}^n , on déduit de la question 2.6 que $C(G, k) = \mathbb{Z}^n / \Delta(G, k) \sim \mathbb{Z}^n / \varphi(\Delta(G, k)) = \mathbb{Z}^n / \Delta(G, \ell) = C(G, \ell)$.

Montrons que $\varphi(\Delta_i) = \Delta'_i$. On a $\Delta_i = d_i x_i + \sum_{j \neq i} e_{i,j} x_j$. Comme $d_i = -\sum_{j \neq i} e_{i,j}$, on peut écrire $\Delta'_i = d_i(x_i - x_k) + \sum_{j \neq i} e_{i,j}(x_j - x_k) - e_{i,k}x_\ell$, ce qui se réécrit pour $i \neq k$ en terme des y_i comme $\Delta'_i = d_i y_i + \sum_{j \notin \{i,k\}} e_{i,j} y_j + e_{i,k} y_k = d_i y_i + \sum_{j \neq i} e_{i,j} y_j = \varphi(\Delta_i)$, et pour $i = k$, $\Delta'_k = d_k x_k + \sum_{j \neq k} e_{k,j} x_j - d_k x_\ell = -d_k x_\ell + \sum_{j \neq k} e_{k,j}(x_j - x_k) = d_k y_k + \sum_{j \neq k} e_{k,j} y_j = \varphi(\Delta_k)$.

Le groupe critique du graphe G étant, à isomorphisme près, indépendant de la racine on le note $C(G)$.

PARTIE 3 : Tas de sable sur un graphe et configurations récurrentes

On considère toujours un graphe connexe $G = (X_n, E)$ de matrice Laplacienne Δ_G comme à la partie précédente. On va maintenant étudier un système de réécriture qu'il est commode d'interpréter comme un modèle de tas de sable : des grains de sable sont répartis sur les sommets d'un graphe et se déplacent le long des arêtes selon des règles d'éboulements. L'un des sommets du graphe est appelé le puits, les grains qui y tombent s'y accumulent.

Formellement on définit une configuration du graphe comme un élément de \mathbb{Z}^n , la i ème coordonnée s'interprétant comme le nombre de grains au sommet i , le n ème sommet représentant le puits. Une configuration $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est positive si $u_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$: le nombre de grains de sable doit être positif en chaque sommet, sauf peut-être dans le puits.

L'éboulement d'un sommet consiste à lui retirer un grain par arête incidente et à distribuer ces grains aux voisins. Plus précisément, étant données deux configurations positives u et v on écrit $u \rightarrow v$ s'il existe un $i \leq n-1$ tel que $v = u - \Delta_i$ (où Δ_i est défini comme dans la partie précédente), et on dit que v est obtenu à partir de u par éboulement du sommet i . On note $\xrightarrow{*}$ la clôture transitive de la relation \rightarrow : $u \xrightarrow{*} v$ si et seulement si il existe des configurations u^0, \dots, u^p telles que $u^0 = u$, $u^p = v$ et $u^i \rightarrow u^{i+1}$ pour tout $0 \leq i < p$. Remarquons encore une fois qu'on éboule jamais le puits.

Question 3.1. Montrer que si $u \xrightarrow{*} v$ alors u et v ont la même image dans le groupe $C(G, n)$.

Par définition de \rightarrow , si $u \rightarrow v$ alors $u - v \in \Delta(G, n)$ et $\bar{u} = \bar{v}$. On conclut par transitivité de la relation d'équivalence. Remarquons que la réciproque n'est pas claire à cause de la condition de positivité des configurations.

On note S_k l'ensemble des sommets à distance k du sommet n dans le graphe G : $S_0 = \{n\}$, S_1 contient les voisins du sommet n , S_2 les voisins de ces voisins qui ne sont pas déjà dans $S_0 \cup S_1$, etc. On pose $\ell = \max\{i \mid S_i \neq \emptyset\}$ et pour $k \leq \ell$, $\mu_k(u) = \sum_{i \in S_k} u_i$ le nombre de grains à distance k du puits dans la configuration u . Le vecteur $\mu(u) = (\mu_0(u), \dots, \mu_\ell(u))$ est appelé potentiel de la configuration u . Une configuration positive u est dite stable si aucun sommet ne peut s'ébouler : $u_i < d_i$ pour tout $i \leq n-1$.

Question 3.2. Montrer que (a) pour toute configuration positive u il existe une configuration stable v telle que $u \xrightarrow{*} v$ et que (b) cette configuration est unique. Indication : pour (a) on pourra s'appuyer sur la notion de potentiel introduite plus haut.

On considère l'ordre lexicographique sur les vecteurs potentiels : $\mu(u) < \mu(v)$ s'il existe i tel que pour tout $j < i$, $\mu_j(u) = \mu_j(v)$ et $\mu_i(u) < \mu_i(v)$. On vérifie immédiatement que si $u \rightarrow v$ alors $\mu(u) < \mu(v)$, en remarquant que tout sommet est voisin d'au moins un sommet plus proche du puits. Puisque le nombre total de grains reste constant au cours des éboulements, toute suite d'éboulements est ultimement constante ce qui prouve (a).

On remarque tout d'abord que si $u \xrightarrow{i} v \xrightarrow{j} w$ et $u \xrightarrow{j} v' \xrightarrow{i} w'$ sont des éboulements possibles alors $w = w'$ puisque $w = (u - \Delta_i) - \Delta_j = (u - \Delta_j) - \Delta_i = w'$. On considère alors les triplets (u, E, E') où u est une configuration et E et E' sont deux séquences d'éboulements qui conduisent à partir de u à des configurations stables différentes. Parmi ces triplets on en prend un (u, E, E') ayant E de longueur minimale. Soit S l'ensemble des sommets qui peuvent être éboulés dans u . Les sommets de S sont nécessairement éboulés au moins une fois dans E comme dans E' sinon leur nombre de grains n'ayant pas

décrue la configuration atteinte ne serait pas stable. Au vu de la remarque précédente on peut réordonner E et E' pour commencer par ébouler une fois chaque sommet de S . La configuration commune obtenue après ces éboulements contredit l'hypothèse de minimalité de E .

On appelle avalanche une suite d'éboulements qui se termine par une configuration stable. Une configuration u est dite récurrente si elle est stable et s'il existe une configuration positive $v \neq 0$ telle que $u + v \xrightarrow{*} u$. Soit δ la configuration avec $\delta_i = d_i$ pour tous les sommets, on remarque que si u est stable alors $\delta - u$ est positive.

Question 3.3. Montrer les points suivants :

- Si $u \xrightarrow{*} u'$ et $v \xrightarrow{*} v'$ alors $u + v \xrightarrow{*} u' + v'$.
- Pour toute configuration positive $v \neq 0$ il existe un entier k et une configuration w (non nécessairement stable) telle que $kv \xrightarrow{*} w$ et $w_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n - 1$.
- Une configuration stable u est récurrente si et seulement s'il existe une configuration positive u' telle que $u' + \delta \xrightarrow{*} u$.

Le premier point est évident : si $u' = u - \sum a_i \Delta_i$ et $v = v - \sum b_i \Delta_i$ alors $u' + v' = u + v - \sum (a_i + b_i) \Delta_i$. Pour le second point poser $k = (d+1)^\ell$ où ℓ est le diamètre de G et d le maximum des degrés des sommets de G : en effet on considère un sommet i_0 tel que $v_{i_0} > 0$ et dans la configuration kv on éboule $(d+1)^{\ell-1}$ fois ce sommet i_0 : il reste positif et ses voisins portent alors au moins $(d+1)^{\ell-1}$ grains de sable chacun ; on les éboule $(d+1)^{\ell-2}$ fois et on continue avec les sommets à distance 2 de i , qui portent chacun au moins $(d+1)^{\ell-2}$ grains. En itérant jusqu'à avoir atteint tous les sommets on trouve w .

Pour le troisième point, l'implication \Leftarrow est évidente : puisque u est stable, $\delta - u$ est positive et l'éboulement $u + (\delta - u + u') \rightarrow u$ montre que u est récurrente. Pour l'implication \Rightarrow on part de $u + v \rightarrow u$ avec v positif non nul, auquel on peut donc appliquer le point (b) pour avoir un k et un w tels que $kv \rightarrow w$ avec $w_i > 0$ pour tout $i \leq n - 1$; en prenant encore d le degré maximum dans G , on a $dw \geq \delta$ et donc $u + kd v \xrightarrow{*} u + dw = u' + \delta \xrightarrow{*} u$, par unicité de la configuration stable atteinte (question 3.2).

Pour toute paire (u, v) de configurations positives on note $u \oplus v$ l'unique configuration stable telle que $u + v \xrightarrow{*} u \oplus v$. Enfin pour toute paire de configurations (non nécessairement positives) on écrit $u \Longrightarrow v$ s'il existe un sommet $i \leq n - 1$ tel que $v = u - \Delta_i$ et $\xrightarrow{*}$ la clôture transitive de cette relation.

Question 3.4. Montrer que si u et v sont deux configurations telles que $u - v \in \langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$ alors il existe une configuration w telle que $w \xrightarrow{*} u$ et $w \xrightarrow{*} v$.

En utilisant $\sum_i \Delta_i = 0$, on écrit $u - v = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \Delta_i$ où les a_i sont des entiers, puis on distingue les indices $I = \{i \mid a_i \geq 0\}$ et $J = \{i \mid a_i < 0\}$. Alors $w = u - \sum_{i \in J} a_i \Delta_i = v + \sum_{i \in I} a_i \Delta_i$ répond clairement à la question.

Soit $\varepsilon = 2\delta - (\delta \oplus \delta)$ où δ est la configuration définie précédemment.

Question 3.5. Montrer que la configuration ε est positive et que $\delta + \varepsilon \xrightarrow{*} \delta$.

Tout d'abord, $\delta \oplus \delta$ est stable donc $\delta - (\delta \oplus \delta)$ est positive. On en déduit que $\varepsilon = \delta + \delta - (\delta \oplus \delta)$ est positive mais aussi, en appliquant la question 3.3(a) aux configurations positives $\delta + \delta$ et $\delta - (\delta \oplus \delta)$ que $\delta + \varepsilon \xrightarrow{*} (\delta \oplus \delta) + \delta - (\delta \oplus \delta)$, qui vaut δ par associativité de $+$.

Question 3.6. Montrer qu'une configuration stable u est récurrente si et seulement si $u + \varepsilon \xrightarrow{*} u$.

Si $u + \varepsilon \xrightarrow{*} u$, alors u est récurrente par définition puisque ε est positive. Maintenant si u est récurrente alors, d'après la question 3.3(c), il existe une configuration positive u' telle que $u' + \delta \xrightarrow{*} u$. De la question 3.3(a) on déduit que $u' + \delta + \varepsilon \xrightarrow{*} u + \varepsilon$. Or d'après la question précédente $u' + \delta + \varepsilon \xrightarrow{*} u' + \delta \xrightarrow{*} u$. Comme u est stable et par unicité de la configuration stable atteignable (question 3.2) on conclut que $u + \varepsilon \xrightarrow{*} u$.

Question 3.7. Montrer que pour toute configuration u il existe une unique configuration récurrente v telle que $u - v \in \langle \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \rangle$.

Posons $\Delta = \langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$. Par définition $\varepsilon = (\delta + \delta) - (\delta \oplus \delta)$ et donc en vertu de la question 3.1 on a $\varepsilon \in \Delta$. Les coordonnées de ε sont toutes strictement positives donc il existe $k > 0$ tel que toutes les coordonnées de $k\varepsilon$ soient supérieures à la valeur absolue de celles de $u - \delta$. On peut alors écrire $u + k\varepsilon$ come $\delta + u'$ avec u' une configuration positive, ce qui implique que la configuration stable v telle que $u + k\varepsilon \xrightarrow{*} v$ est récurrente. Elle appartient de plus à Δ comme demandé dans le théorème.

Pour l'unicité, montrons que si u et v sont deux configurations récurrentes telle que $u - v \in \Delta$ alors $u = v$. Sous ces hypothèses la question 3.4 nous donne une configuration w telle que $w \xrightarrow{*} u$ et $w \xrightarrow{*} v$. En prenant k assez grand on a alors $w + k\varepsilon \xrightarrow{*} u + k\varepsilon$ et $w + k\varepsilon \xrightarrow{*} v + k\varepsilon$. D'après la question 3.6, puisque u et v sont récurrentes, $u + k\varepsilon \xrightarrow{*} u$ et $v + k\varepsilon \xrightarrow{*} v$. Par l'unicité montrée à la question 3.2, $u = v$.

Question 3.8. Montrer que l'opération \oplus munit l'ensemble $R(G)$ des configurations récurrentes de G d'une structure de groupe et que le groupe ainsi obtenu est isomorphe à $C(G)$.

Étant données deux configurations récurrentes u et v , la somme $u \oplus v$ est par définition une configuration stable. De plus $u + \varepsilon \xrightarrow{*} u$, de sorte que $(u + \varepsilon) + v \xrightarrow{*} u \oplus v$. Or $(u + v) + \varepsilon \xrightarrow{*} (u \oplus v) + \varepsilon$ d'où $(u \oplus v) + \varepsilon \xrightarrow{*} u \oplus v$ par l'unicité de la configuration stable atteignable. On en déduit que $u \oplus v$ est récurrente, et que \oplus définit bien une loi interne.

On conclut en remarquant que d'après la question 3.7 les configurations récurrentes, modulo la valeur du puits, sont en bijection avec les classes d'équivalence de \mathbb{Z}^n relativement à $\Delta(G, n)$, et que \oplus associe à deux configurations u et v un élément $u \oplus v$ équivalent à $u + v$ relativement à $\Delta(G, n)$, en accord avec la définition de la loi de groupe sur $C(G)$ vu comme $\mathbb{Z}^n / \Delta(G, n)$.

On peut aussi directement remarquer que la loi est commutative et associative et exhiber l'élément neutre (l'unique configuration récurrente $\bar{\varepsilon}$ telle que $\varepsilon - \bar{\varepsilon} \in \Delta$), et l'inverse de u (l'unique u^{-1} récurrent telle que $(\varepsilon - u) - u^{-1} \in \Delta$).

Nous avons donc construit une représentation du groupe critique d'un graphe en terme d'éboulements.

PARTIE 4 : Configurations récurrentes et arbres couvrants

On suppose dans cette partie que le graphe connexe G sur lequel on étudie le tas de sable a n sommets et m arêtes. On désigne comme précédemment par S_i l'ensemble des sommets à distance i du puits, on pose $\ell = \max\{i \mid S_i \neq \emptyset\}$ et on note $\mu_i(u)$ le nombre de grains à distance i du puits dans la configuration u . On pose de plus $S_{>i} = \bigcup_{j>i} S_j$ (l'ensemble des sommets à distance au moins $i + 1$ du puits) et $\mu_{\geq i}(u) = \sum_{j \geq i} \mu_j(u)$ (le nombre de grains à distance au moins i du puits).

Question 4.1. Montrer que le nombre total de grains hors du puits dans une configuration stable est majoré par $2m$.

On a au plus $d - 1$ grains de sable sur un sommet de degré d stable et la somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à 2 fois son nombre d'arêtes.

Question 4.2. Montrer que deux séquences d'éboulements qui conduisent d'une configuration u à une configuration stable v font ébouler le même nombre de fois le sommet i pour tout i : autrement dit, deux séquences d'éboulements complètes ne diffèrent que par l'ordre des éboulements.

Par unicité de l'écriture de $u - v$ dans la famille libre des $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$.

Il est donc possible de parler du nombre de sommets éboulés pour passer d'une configuration positive à la configuration stable associée. Remarquons pour simuler efficacement un éboulement sur ordinateur il faudrait, entre autres choses, gérer dynamiquement l'ensemble des sommets éboulables, pour ne pas perdre de temps à les chercher. On se concentre ici sur la complexité intrinsèque du modèle en prenant comme définition de complexité d'une avalanche le nombre d'éboulements qui la compose.

Question 4.3. On considère une configuration u ayant p grains hors du puits et on l'éboule dans l'ordre suivant :

– Pour i décroissant de ℓ jusqu'à 1, répéter les opérations suivantes :

- (a). ébouler simultanément tous les sommets instables de S_i ;
- (b). tant qu'il y a des sommets instables dans $S_{>i}$, les ébouler ;
- (c). s'il y a à nouveau des sommets instables dans S_i reprendre à l'étape (a).

Montrer que le nombre d'éboulements effectués à l'étape i est au plus $\mu_{\geq i} \cdot |S_{>i}|$ et en déduire une borne sur la complexité d'une avalanche partant de u en fonction de ℓ , n et p (autrement dit majorer le nombre d'éboulements de $u \xrightarrow{*} v$ avec v stable).

Remarquons tout d'abord que lorsqu'on arrive à l'étape i les grains de sable sur les sommets de S_i sont les $\mu_i(u)$ gains initiaux auxquels s'ajoutent au pire les $\sum_{j>i} \mu_j(u)$ gains issus des $S_{>j}$, soit $\mu_{\geq i}(u)$ grains. Par ailleurs lors d'une étape (b) chaque sommet de $S_{>i}$ s'éboule au plus une fois : en effet ces sommets sont stables avant l'étape (a) et pour qu'un premier sommet k parmi les $S_{>i}$ s'éboule une deuxième fois il faudrait qu'il ait reçu plus de d_k grains de ces d_k voisins, or chacun d'eux ne s'est éboulé qu'au plus une fois. Le nombre d'éboulement dans une étape (b) est donc majoré par $|S_{>i}|$.

Chaque fois qu'on passe en (a) au moins un sommet de S_i est instable donc au moins un grain va vers un sommet de S_{i-1} et le nombre de grains de sable dans les $S_i \cup S_{>i}$ diminue strictement. On en déduit que le nombre de passages en (a) pour un i donné est au plus $\mu_{\geq i}(u)$.

Finalement le nombre d'éboulement est majoré par $\sum_{i=1}^{\ell} \mu_{\geq i}(u) |S_{>i}|$. Pour un graphe à n sommets de diamètre ℓ et une configuration initiale u à p grains hors du puits, on en déduit une borne de ℓnp éboulements.

Question 4.4. Appliquer votre borne pour majorer en fonction de ℓ , n et m la complexité du test $u + \varepsilon \xrightarrow{*} u$ pour déterminer si une configuration stable est récurrente ? Même question pour le calcul de $u \oplus v$ pour u et v récurrentes ?

La configuration $u + \varepsilon$ contient au plus $3 \cdot 2m = 6m$ grains de sable, où m est le nombre d'arêtes du graphe. On en déduit une complexité de $6\ell nm$. Si on compte de plus le calcul de $\delta \oplus \delta$ il faut y ajouter $4\ell nm$ éboulements, qui est plus généralement le coût du calcul de $u \oplus v$ pour u et v stables.

Le test $u + \varepsilon \xrightarrow{*} u$ fait intervenir la configuration ε qui contient au moins $2m$ grains et qu'il faut avoir calculé au préalable à partir de sa définition. On donne maintenant une caractérisation un peu plus « efficace » des configurations récurrentes. Soit $\beta = -\Delta_n$ la configuration obtenue par éboulement du puits : $\beta_i = 1$ pour tous les voisins du puits et $\beta_n = -d_n$.

Question 4.5. Montrer qu'une configuration est récurrente si et seulement si $u + \beta \xrightarrow{*} u$. Montrer de plus que si u est récurrent, dans une séquence d'éboulements de $u + \beta$ à u , chaque sommet s'éboule exactement une fois. En déduire un test de récurrence de complexité linéaire.

Si $u + \beta \xrightarrow{*} u$ alors u est récurrente par définition puisque β est positive. Supposons donc u récurrente. Par définition de \oplus , $(u + \beta) - (u \oplus \beta) \in \langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$, et puisque $\beta = -\Delta_n$, la même remarque vaut pour $u - (u \oplus \beta)$. Par la propriété d'unicité de la question 3.7 on déduit $u = u \oplus \beta$, qui est équivalent à l'énoncé.

Pour la seconde partie de la question on remarque que $\beta = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta_i$ et on conclut par unicité de l'écriture dans la famille libre des $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$.

Pour tester la récurrence il suffit donc d'ébouler la configuration $u + \beta$ et de tester si le résultat est bien u .

Nous allons maintenant voir que le test $u + \beta \xrightarrow{*} u$ permet d'associer les configurations récurrentes à d'autres structures naturelles sur le graphe.

L'algorithme suivant, appelé algorithme thermique, prend en entrée une configuration stable u et effectue les opérations suivantes :

- $u^{(0)} = u + \beta$; $R_{-1} = \{n\}$; $i := 0$
- répéter tant que $u^{(i)}$ n'est pas stable :
 - soit $R_i = \{k \mid k < n, u_k^{(i)} \geq d_k\}$ l'ensemble des sommets instables de $u^{(i)}$,
 - soit $u^{(i+1)} = u^{(i)} - \sum_{j \in R_i} \Delta_j$,
 - soit $A_i = \{\{k, \ell\} \mid k \in R_i, \ell = \text{select}(V_k \cap R_{i-1}, u_k^{(i)} - d_k)\}$
 - $i := i + 1$
- $A = \bigcup A_i$

où la fonction $\text{select}(I, j)$ renvoie le $(j + 1)$ ème plus petit élément d'un ensemble fini I d'entiers (ou $+\infty$ si $|I| \leq j$), et où V_k désigne l'ensemble des sommets voisins de k dans G .

Question 4.6. Montrer que l'algorithme thermique termine et que si la configuration de départ est récurrente les R_i forment une partition des sommets de G et les A_i sont des ensembles d'arêtes bien formées (pas de $+\infty$ renvoyé par select).

Par construction $u^{(i)} \xrightarrow{*} u^{(i+1)}$ donc la terminaison est assurée par la terminaison des avalanches. Si la configuration de départ est récurrente on sait de plus d'après la question précédente que chaque sommet s'éboule exactement une fois, donc apparaît dans un et un seul R_i . Un sommet k de S_i est stable jusqu'à l'étape $i - 1$ incluse et devient instable à l'étape i en recevant $|V_k \cap S_{i-1}|$ grains de sable. Autrement dit $u_k^{(i-1)} = u_k^{(i)} - |V_k \cap S_{i-1}| < d_k$ et $u_k^{(i)} \geq d_k$, de sorte que l'appel à select renvoie bien l'index d'un voisin de k .

Un sous-graphe d'un graphe $G = (X, E)$ est un graphe $G = (X, E')$ avec $E' \subset E$. Un chemin u_0, \dots, u_k de longueur k est un cycle si $u_0 = u_k$ et $k \geq 2$. Un cycle est simple si pour tout $0 \leq i < j \leq k - 1$, $u_i \neq u_j$. Un graphe est une forêt s'il ne contient pas de cycle simple, c'est un arbre s'il est de plus connexe. Un arbre couvrant d'un graphe $G = (X, E)$ est un sous-graphe $T = (X, A)$ de G qui est un arbre.

Question 4.7. Montrer que l'algorithme thermique appliqué à une configuration récurrente construit un ensemble d'arêtes A tel que (X, A) soit un arbre couvrant du graphe.

Pour chaque sommet $k \in R_i$ excepté le puits, on trouve dans A exactement une arête $\{k, \ell\}$ avec $\ell \in R_{i-1}$, et les autres arêtes de A incidente à k sont de la forme $\{k, \ell'\}$ avec $\ell' \in R_{i+1}$. En suivant ces uniques arêtes on forme des chemins dont les sommets appartiennent à des R_i d'indice strictement décroissants, qui terminent donc au puits. En particulier le sous-graphe (X, A) est connexe. De plus s'il existait un cycle dans (X, A) on obtiendrait une contradiction en considérant un sommet du cycle issu de R_i avec i maximum : ses 2 voisins sur le cycle devraient tout deux être dans R_{i-1} .

Question 4.8. Montrer que deux configurations récurrentes différentes donnent par l'algorithme thermique deux arbres couvrants distincts.

Étant donné un arbre couvrant (X, A) de G on définit une partition $T = (T_i)$ des sommets de G en fonction de leur distance au puits dans l'arbre : $T_{-1} = \{n\}$, T_0 est l'ensemble des voisins du puits n , et pour tout $i \geq 2$, T_{i+1} est l'ensemble des voisins des sommets de T_i qui ne sont pas dans T_{i-1} .

Si (X, A) est construit à partir d'une configuration récurrente u alors les T_i associés à A sont égaux aux R_i utilisés par l'algorithme appliqué à u . Deux configurations récurrentes qui donneraient le même arbre utilisent donc les mêmes R_i aux mêmes étapes, effectuent les mêmes éboulements et utilisent les mêmes $V_k \cap R_{i-1}$ pour construire l'arbre. Le fait qu'elles sélectionnent les mêmes arêtes implique de plus l'égalité des $u_k^{(i)}$ pour tout $k \in S_i$. Comme chaque sommet apparaît au moins une fois dans un R_i , on obtient une contradiction la première fois qu'on traite un sommet sur lequel les 2 configurations diffèrent.

Question 4.9. Montrer réciproquement qu'à tout arbre couvrant (X, A) est associée une configuration récurrente qui le redonne par l'algorithme thermique.

On reprend la partition T définie dans le corrigé de la question précédente.

Étudions une éventuelle configuration u récurrente qui donne A par l'algorithme en utilisant une partition R : on a déjà vu à la question précédente que $R = T$ et donc peut se lire sur l'arbre. Considérons un sommet $k \in T_i$ différent du puits. Au cours de l'algorithme, le sommet k reçoit un grain de sable pour chacun de ses voisins qui sont dans R_{-1}, \dots, R_{i-1} , de sorte que $u_k^{(i)} = u_k + s(A, k)$ avec $s(A, k) = |V_k \cap (R_{-1} \cup \dots \cup R_{i-1})| = |V_k \cap (T_{-1} \cup \dots \cup T_{i-1})|$, qui se lit donc sur l'arbre. Soit ℓ le père de k dans l'arbre : pour que ℓ soit choisi comme père au moment où k est traité par l'algorithme, il faut que le rang $r(A, k)$ de ℓ dans la liste croissante des sommets de $V_k \cap R_{i-1} = V_k \cap T_{i-1}$ soit $u_k^{(i)} - d_k$. On en déduit que pour que la configuration u donne l'arbre A il faut que $u_k = d_k + r(A, k) - s(A, k)$ pour tout k : on sait donc trouver l'éventuelle configuration u à partir de l'arbre.

Il reste à vérifier que la configuration u ainsi définie à partir d'un arbre A est bien une configuration récurrente. Par construction on a $0 \leq r(A, k) < s(A, k) \leq d_k$ donc la configuration est bien positive et stable. On peut donc bien appliquer l'algorithme et vérifier qu'à chaque étape il rechoisit les arêtes de A . En particulier il provoque exactement un éboulement par sommet, ce qui montre qu'il retombe à la fin sur la configuration u , qui est donc récurrente.

Question 4.10. Dédurre des questions précédentes que le nombre de configurations récurrentes d'un graphe est égal au nombre de ses arbres couvrants.

On a vu que l'algorithme thermique définit une bijection entre les configurations récurrentes et les arbres couvrants du graphe, ce qui implique immédiatement le résultat.

Fin de l'épreuve