# Rapport sur l'épreuve MPI2 2010

**Thème :** Ce problème portait sur l'étude du comportement asymptotique de solutions d'"équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles. Les idées de la dernière partie permettent de montrer que sous la condition de Kalman (condition **[d]** de la partie II), un système hyperbolique linéaire partiellement dissipatif est hypocoercif : ses solutions ne vérifient pas forcément une inégalité de coercivité, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|_2^2 \leqslant -c\|w(t)\|_2^2, \forall t \in [0, +\infty), \text{ avec } c > 0,$$

(où $\|.\|_2$ désigne la norme usuelle sur $L^2(0, 2\pi)$) mais elles convergent néanmoins exponentiellement vite vers zéro dans $L^2(0, 2\pi)$. La preuve de la convergence exponentielle repose sur la recherche d'une norme $N$, équivalente à la norme $\|.\|_2$, pour laquelle on a l'inégalité

$$\frac{dN[w(t)]^2}{dt} \leqslant -cN[w(t)]^2, \forall t \in [0, +\infty), \text{ avec } c > 0.$$

**Intérêt :** Ce problème présentait l'avantage de tester les compétences des candidats sur une large partie du programme des classes préparatoires :

- algèbre linéaire (manipulation de déterminants en I.1, de famille libre en I.2, théorème du rang en II.1 et II.2 , théorème de Cayley Hamilton en II.3, manipulation d'exponentielles de matrices en III.2, III.6, III.7 et de normes subordonnées en III.3, III.7),
- calcul différentiel et équations différentielles (théorème de Cauchy-Lipschitz en III.2, inégalités différentielles en V.2),
- topologie dans $\mathbb{R}$ (théorème de limite monotone en III.3) et dans $\mathbb{C}^N$ (propriété de Bolzano Weierstrass en III.6, normes équivalentes en V.1),
- analyse de Fourier (relations sur les coefficients en IV.2, théorème de Bessel Parseval en IV.4 et V.4),
- série de fonctions (convergence simple, théorème de dérivation terme à terme, interversion d'une somme et d'une intégrale en IV.3).

**Niveau/Résultat :** Le niveau des copies était globalement correct. Les notes s'étalent de 0 à 20, avec une moyenne à 9, et un ecart type entre 3,76.

**Les problèmes rencontrés :**

De façon générale, la concision est une qualité trop rare dans les copies.

**I.1.a** Certains candidats ne précisent pas l'ordre dans lequel les opérations sur les lignes doivent être menée, ce qui est pourtant important. Beaucoup trop de candidats rédigent mal la récurrence : certains se contentent de dire vaguement 'et ainsi de suite', 'on itère le précédé', d'autres invoquent bien une récurrence mais disent quelle est 'immédiate' et ne vérifient même pas l'initialisation. De tels rédactions sont évidemment sanctionnées.

**I.2** Un nombre non négligeable de candidats disent des choses fausses, par exemple, '$(f_1, ..., f_n)$ est libre si et seulement si pour tout $t$, $\det(f_1(t), ..., f_n(t)) \neq 0$', ou considèrent des objets qui n'ont pas de sens, par exemple, $V(f_1, ..., f_n)$. Beaucoup de candidats utilisent plus ou moins implicitement l'injectivité de l'exponentielle, qui est valable sur $\mathbb{R}$ mais pas sur $\mathbb{C}$. Certains candidats la prétendent même bijective... Parfois les candidats utilisent les valeurs des fonctions $f_1, ..., f_n$ en dehors de l'intervalle autorisé $(0, T)$.

**II.1** Il y a beaucoup de réponses farfelues à cette question, pourtant simple (on pouvait appliquer le théorème du rang, ou, de façon équivalente, montrer que les colonnes de $K$ sont libres). Certains candidats ont été perturbés par la forme rectangulaire (et non carrée) de la matrice $K$, ils ont appliquée cette matrice $N^2 \times N$ à un vecteur de $\mathbb{C}^{N^2}$. On a parfois pu lire :'$(b_1, ..., b_N)$ est une base de $\mathbb{C}^N$ et $Bb_k \neq 0$ pour tout $k$ donc $B \in GL_N(\mathbb{C})$'. Parfois, les candidats vérifient bien que $\mathrm{Ker}(K) = \{0\}$ et en déduisent que $K$ est de rang $N$, mais ne le justifient pas.

**II.2** Cette question est plutôt mieux traitée.

**II.3.a** Cette question, proche du cours, a été globalement assez bien traitée (récurrence ou division euclidienne par le polynôme caractéristique). Il y a cependant eu quelques réponses surprenantes, par exemple, '$(I, A, ..., A^N)$ est une famille de $(N + 1)$ vecteurs dans un espace de dimension $N$ donc elle est liée'.

**II.3.b** Beaucoup trop de candidats montrent que $exp(At)$ est polynôme en $A$ (ce qui est effectivement vrai, mais pas nécessaire pour cette question), en procédant à une interversions des sommes illicite et inadmissible. Très très peu de candidats utilisent le caractère fermé de $\mathbb{C}[A]$ (car de dimension finie) pour le démontrer. On a également lu des copies prétendant que $\mathbb{C}[X]$ est fermé...

**II.4.** La grande majorité des candidats a très mal traité cette question, se fourvoyant complètement dans l'argumentation. Une petite partie des candidats raisonne correctement, mais oublie de ne considérer que des valeurs propres deux à deux distinctes. Certaines copies mentionnent même '$A$ est diagonalisable donc ses valeurs propres sont distinctes', ou '$A$ est diagonalisable et ses vecteurs propres ne sont pas dans le noyau de $B$ donc $B$ est inversible'.

**II.5** A cette question, nous attendions la réponse simple 'les 4 énoncés sont équivalents lorsque $A$ est diagonalisable'. Quelques copies nous ont étonnés en cherchant à montrer que l'hypothèse de diagonalisabilité n'était pas nécessaire avec un argument de densité vain.

**III.2** La majorité des candidats n'applique pas correctement le théorème de Cauchy-Lipschitz (CL), certains se contentent de l'invoquer, sans vérifier ses hypothèses, ils l'appellent même parfois 'théorème de Cauchy'. Nous rappelons donc que

- il faut vérifier ses hypothèses (fonction localement lipschitzienne en $X$ pour CL non linéaire, coefficients continues en $t$ pour CL linéaire)
- il ne faut pas prétendre n'importe quoi sur l'intervalle de définition de la solution maximale (c'est $\mathbb{R}$ quand on applique CL linéaire, mais si on applique CL non linéaire, on ne peut pas conclure que c'est bien $\mathbb{R}$).

Certains candidats appliquent CL 'composante par composante' et semblent ignorer les liaisons entre ces composantes. Certains candidats mettent egalement le $X_0$ du mauvais côté $X_0 \exp(Mt)$, et poursuivent le problème ainsi...

**III.3** Beaucoup de candidats n'ont pas compris la notion de norme subordonnée.

**III.4** Cette question a été bien traitée

**III.5** Le (a), qui était facile, a été bien traité. Le (b), qui nécessitait d'avoir bien compris la partie II a été nettement moins bien traité.

**III.6** Des réponses très surprenantes ont été lues à la question (a) : '$\mathbb{C}^N$ est compact', ou '$\mathbb{C}^N$ est complet donc on peut extraire une sous-suite convergence'. Certains candidats ne semblent connaître la propriété de Bolzano Weierstrass que sur $\mathbb{R}$ et procèdent donc à des extractions sur chaque composante, ce qui est fastidieux (et parfois mal mené). Au (b), certains candidats intervertissent sans vergogne la limite et la dérivé en temps, d'autres utilisent $\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$ mais sans dire que c'est licite parce que les matrices commutent. Le (c) a été bien traité en général.

**III.7** La question (a) a été massacrée. Infiniment peu de candidats l'ont correctement traitée. Cela témoigne d'un manque de compréhension de la norme subordonnée. La question (b) a généralement été bien traitée. La question (c) a reçu des réponses étonnantes : certains candidats disent (implicitement) qu'un polynôme est borné sur $\mathbb{R}$, d'autres s'entêtent, malgré l'indication, a dire que $M$ est diagonalisable, certains prétendent même le démontrer ('$A$ est diagonalisable et $B^*B$ est symétrique donc diagonalisable, donc $A-B^*B$ est diagonalisable)...

**III.8** Les candidats ont souvent la bonne intuition, mais le contre-exemple proposé est parfois insuffisant. Par exemple $A = 0$ et $B = 0$ ne convainc pas le correcteur, parfois, les candidats proposent un contre-exemple où la matrice $A$ n'est pas antisymétrique, ce qui est dommage...

**IV.2** L'égalité sur les coefficients de Fourier est très souvent bien traitée. Quelques candidats maladroits développent $w$ en série de Fourier puis dérivent terme à terme (souvent sans justification) pour l'obtenir. En revanche, la convergence de la série est mal traitée dans la moitié dans copies. Certains candidats prétendent sans scrupule que $c_k(w'') \to 0$ donc est un $o(1/k)$.

**IY.3** Cette question sur les séries de fonctions est très classique. Nous attendions des candidats à l'entrée des ENS de savoir la traiter en toute autonomie. Nous avons été déçus. Trop souvent, les candidats attaquent la preuve de la dérivabilité sans avoir, au préalable, vérifié la convergence simple. Certains candidats prétendent que la convergence absolue des dérivées, ou la convergence normale de la fonction, suffisent pour pouvoir dériver terme à terme. La 3e condition de (4) nécessitait une interversion série/intégrale pas toujours bien justifiée. La 4e condition de (4) reposait sur le théorème de Dirichlet, nous avons apprécié lorsque les candidats en rappelaient les hypothèses, fait rare.

**IV.4** Cette question a été très peu traitée. Certains candidats procèdent à une interversion limite/intégrale de justification inappropriée ('la convergence simple sur un segment suffit'). D'autres utilisent la question III.7.(c) sans réaliser que les constantes $K$ et $c$ dépendent a priori de $k$.

**V** Cette partie a été moins abordée. Quelques copies on bien vu l'équivalence des normes dans le 1. Quelques très rares candidats arrivent à la fin du problème