EPREUVE ECRITE DE MATHEMATIQUES

ENS : PARIS – CACHAN

Durée : 4 heures ***Coefficients* : PARIS 4**
CACHAN 5

MEMBRES DE JURY : A. DESOLNEUX, T. DUQUESNE, E. GRENIER, F. HELEIN

Le thème général de ce sujet était l'étude mathématique de différentes propriétés de l'entropie, à la fois dans sa version discrète et dans sa version continue.

La majorité des candidats a abordé entièrement les parties I et II, ce qui assurait déjà une très bonne note lorsque toutes les questions étaient bien traitées. La partie III, qui était indépendante de la partie précédente, a souvent été partiellement abordée et seule une poignée de candidats a atteint la partie IV.

La première partie du sujet était consacrée à des résultats préliminaires sur des inégalités de convexité. Dans la question I-1, il était demandé d'utiliser une formule de Taylor, et on a pu voir des réponses des plus fantaisistes : des restes intégrales faux, mais aussi parfois de graves confusions entre formule locale et globale.
Beaucoup de candidats ont perdu du temps à faire la question I-3 en utilisant des sommes de Riemann, alors qu'on pouvait faire le même raisonnement qu'à la question précédente en utilisant la question I-1 avec le point $x = \int_a^b g(t)f(t)dt$.

Dans la partie II, les questions II-1 à II-4.b n'ont pas posé de difficultés particulières. La question II-4.c qui était moins guidée que les autres, n'a été que très rarement bien traitée. Toute la question 5 (divisée en sous-questions 5.a à 5.e) portait sur une définition axiomatique de l'entropie: on donnait un certain nombre d'axiomes et le but était de montrer qu'à une constante près, seule l'entropie définie précédemment vérifiait ces axiomes. Cette question demandait de savoir faire la synthèse des différentes propriétés énoncées, et peu de candidats ont traité correctement cette question dans son entier. Dans la question 5.b, où l'on demandait de montrer que $\psi(n) = \ln n$, beaucoup de candidats ont vu quel était le raisonnement à faire, mais la mise en forme n'était pas toujours convaincante.

La partie III introduisait la version continue de l'entropie, appelée *entropie différentielle*. Dans la première question, il s'agissait de montrer que la fonction $f \ln f$ était intégrable. Cette question n'a été que très rarement bien traitée, on a vu trop souvent des raisonnements complètement faux du type: "la fonction f est bornée, donc la fonction $\ln f$ est aussi bornée".

Le but de la partie IV était la démonstration d'une inégalité reliant l'entropie de deux fonctions f et g à celle de leur produit de convolution noté $f * g$. Cette partie n'a été traitée que par une poignée de copies, sauf en ce qui concerne la première question qui a souvent fait l'objet de tentative de grappillage; tentative souvent infructueuse puisque très peu de candidats ont correctement justifié le fait "F est de classe C^1".