ÉPREUVE : **ÉCRIT DE MATHÉMATIQUES**

ENS : **PARIS — LYON**

Durée : 6 *heures,* *Coefficients :* **PARIS 6** **LYON 4**

MEMBRES DE JURYS : **V. BEFFARA, R. DE LA BRETÈCHE, S. GOUËZEL, G. MIERMONT**

Dans ce problème, on proposait aux candidats de démontrer que l'on peut munir d'une structure de groupe de type fini la réunion $\overline{C}(\mathbb{Q})$ de l'ensemble des solutions (x, y) à coordonnées rationelles de l'équation $y^2 = x^3 - Dx$ et d'un point à l'infini. Le sujet original permettait de voir la réaction des candidats face à des questions non classiques. Peu de connaissances particulières étaient cruciales si ce n'est les relations entre coefficients et racines d'un polynôme. Le candidat devait déterminer lui-même la méthode dans de nombreux cas pour répondre à la question posée. Dans la quasi-totalité des copies, la partie IV.B n'est pas abordée, la répartition des points se concentrant sur les deux premières parties. Le sujet était très long mais de bons candidats se concentrant sur les deux premières parties ont eu de très bonnes notes.

La partie I a été bien traitée dans les bonnes copies. Dans la question I.1b, des candidats confondent la notion de groupe fini et celle de groupe de type fini.

Dans la question I.2a, de nombreuses grosses erreurs ont été observées. Par exemple, pour certains candidats une série dont le terme général tend vers 0 est de Cauchy et par conséquent est convergente.

Dans la question II.1.b, la continuité des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients n'étant pas au programme, ceux qui l'utilisaient sans la démontrer n'ont pas recueilli le maximum des points. Certains oublient de tenir compte de la positivité des racines. En fait, un simple argument reposant sur le théorème des valeurs intermédiaires suffisait.

Les questions II.2a et II.2b résultaient d'une simple étude de fonction. Dans de nombreuses copies, le tracé de la courbe C était très souvent erronné ce qui ne permettait pas aux candidats de l'utiliser de manière pertinente. Dans la question II.2.b, en fonction de la méthode employée, il fallait étudier à part le cas 0 pour montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Le II.2d résulte des relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme. Cette question n'a été bien traitée que par quelques copies.

Dans la question II.3.a, trop de candidats ne précisent pas que la fonction L est continue, la croissance de L ne suffisant pas pour conclure.

Dans la question II.4.b, si on applique le 4a à $Q = X^k$ en prenant la valeur en 0 (au lieu d'identifier le coefficient de degré $n - 1$), il est important de donner un argument permettant d'exclure le cas où un des x_i est nul, ce qui n'a été que rarement bien fait par les candidats choisissant cette méthode.

La question II.5.a, une des plus difficile du problème, n'a jamais été bien traitée. Il fallait pour cela faire intervenir des fractions ayant un dénominateur $= 3x_i^2 - D^2 - 2uy_i$ et appliquer la question précédente.

La question II.5.b fait intervenir plusieurs résultats précédemment montrés dont notamment la question 1d pour montrer que le nombre de t tel que $H_a(t) = a$ ou t est fini. Cela a été entièrement compris par très peu de candidats.

Pour faire la question II.6.b, il suffisait de définir la loi + par $P+Q = E^{-1}(E(P)E(Q))$.

La partie III où étaient rassemblés quelques calculs nécessaires pour la suite du problème avait une moins grande importance dans la note finale. Certains élèves essaient de faire croire aux correcteurs qu'ils obtiennent bien les formules sans donner d'argument convaincant.

Dans beaucoup de copies, seul le cas a et b entiers de la question IVA.1b est réellement établi. La question IVA.2c nécessitait une étude de cas rigoureuse.