EPREUVE DE MATHEMATIQUES

ENS : PARIS CACHAN

Durée : 4 heures Coefficients : PARIS 4 CACHAN 5

MEMBRES DE JURYS : : T. Cao, T. Duquesne, E. Grenier

L'épreuve porte sur l'étude d'opérateurs, dits « pseudodifférentiels », définis à partir de la transformée de Fourier d'une fonction. Le sujet est long, et les meilleures copies n'ont guère dépassé les deux tiers du sujet. Le niveau des questions est très variable, allant d'élémentaire à très délicat. Le « grappillage » de points en répondant à des questions simples des parties 2, 3 ou 4 ne sert à rien, ces questions ne rapportant que très peu de points.

La première partie est consacrée à la définition des espaces dits de Sobolev H1, et leurs liens avec les fonctions bornées. Les deux premières questions sont élémentaires et traitées dans toutes les copies ou presque. I.3 n'a été résolue que par un petit nombre de copies (noter la petite coquille : il faut lire « s » et non « Hs » dans l'indice de la norme) : il faut penser à utiliser Cauchy Schwarz avec des poids corrects.

Beaucoup d'erreurs de calculs dans I.4, dus à des erreurs de signes lors des intégrations par parties. I.5, I.6 et I.7 ont été traitées dans les deux tiers des copies.

Les correcteurs ont été fortement surpris par le grand nombre d'erreurs dans la question I.8. La grande majorité des candidats se montre incapable de prouver l'inégalité triangulaire. Cauchy Schwarz apparaît très mal maîtrisé, alors que fleurissent les « preuves » du type « $| a + b |^2 <= a^2 + b^2$ » suivi de « $\sqrt{(a^2+b^2)} <= |a|+|b|$ » …

La seconde partie est consacrée à la définition des opérateurs pseudodifférentiels et à leur définition dans L2. Dans la première question, beaucoup de candidats ont oublié de prouver que la somme de la série était indéfiniment dérivable, se contentant de prouver son caractère continu. Beaucoup de ceux qui y ont pensé ont écrit la formule suivante pour la dérivée nième d'un produit de fonctions u v : « (uv)(n) = u(n) v + u(n-1) v' + … + u v(n) », oubliant les coefficients binomiaux dans la formule de Leibniz. Cette erreur est très courante et se retrouve dans une majorité de copies à l'occasion de la question III.1.

Les questions II.2 et II.3 sont simples. II.4, qui pose un problème d'interversion de sommes, a été très sélective. Les autres questions de la partie II n'ont été abordées que par les toutes meilleures copies.

Beaucoup de candidats ont voulu grappiller quelques points en répondant à III.1, mais la plupart n'ont pas su appliquer Leibniz. III.2 est sans difficulté. III.3 n'a été effleurée que très rarement.

Enfin la partie IV donne une application de ces opérateurs (résolution d'équations différentielles « à une fonction régulière près ») et n'a pas été abordée sérieusement, sauf IV 1.