Epreuve écrite de Mathématiques MPI 1

ENS : Paris — Lyon — Cachan

Coefficients : Paris 6 — Lyon 4 — Cachan 5

Membres de jurys : R. de la Bretèche, S. Fischler, T. Lévy, R. Rouquier

Le problème était consacré aux opérateurs de Dunkl, des endomorphismes de l'algèbre des fonctions différentiables ou polynomiales sur $\mathbb{C}^n$ dépendant d'un paramètre. Ces opérateurs déforment les dérivées partielles et font intervenir l'action du groupe symétrique sur les coordonnées. Après une étude d'un cas particulier, il s'agissait d'établir la commutation de ces opérateurs. La suite du problème était consacrée à l'étude des valeurs singulières du paramètre et le problème se terminait par la détermination des fonctions propres des opérateurs, pour des valeurs positives du paramètre.

La première partie ne présentait pas de difficultés particulières, mais de nombreux candidats n'ont pas su donner une démonstration suffisamment rigoureuse des questions 1.d et 2.a.

La deuxième partie amenait le candidat à effectuer des calculs à organiser judicieusement pour éviter qu'ils ne deviennent fastidieux. Il était parfois rapide de vérifier certaines égalités sur des monômes. Un argument de continuité ramenait les problèmes à l'intersection des U_{ij}. Rappelons au passage qu'un polynôme en plusieurs variables nul en une infinité de points n'est pas nécessairement nul. Dans la question 1.a, la continuité de $T_u(f)$ n'a été que rarement bien établie. On pouvait la voir en exprimant $\Delta_{ij}(f)$ sous forme intégrale.

La troisième partie présentait des questions difficiles. Trois démonstrations de la question 1.a ont été trouvées par les candidats. La plus rapide consistait à poser $z = \cos\theta + i\sin\theta$ et à introduire un polynôme Q tel que $Q(z) = z^d\tilde{P}(\theta)$. La seconde méthode consistait à introduire un polynôme R tel que $\tilde{P}(\theta) = (\sin\theta)^d R(\text{cotan }\theta)$. La dernière méthode consistait à introduire la nouvelle variable $u = \tan\frac{\theta}{2}$.

La question 1.b demandait de justifier soigneusement toutes les étapes (et de corriger la faute de frappe dans le sujet : utiliser $\tilde{P}(0) = -\cos(d\beta)$).

La question 1.c demandait à nouveau de bien justifier les différentes étapes, ce qui n'a été que trop rarement fait. Par exemple, on ne peut élever au carré une inégalité si ses termes ne sont pas positifs.

La question 1.d n'a été résolue que par très peu de candidats. Elle demandait de passer en coordonnées polaires et d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Peu de candidats ont vu la subtilité de la question 2.b. Il fallait montrer que le calcul de $D_u(P)(x)$ pouvait se faire dans un sous-espace de dimension 2.

La partie IV mélangeait des questions de difficulté variable. La question d'algèbre linéaire 1.b a amené les candidats à explorer différentes pistes. Le point-clef était d'utiliser la commutation des ρ_{ij} avec ϕ, qui permettait de restreindre les ρ_{ij} aux sous-espaces propres de ϕ, et d'utiliser ensuite que les valeurs propres des ρ_{ij} sont ± 1. L'inclusion $L_d \subset [-N, N]$ pouvait aussi se voir en étudiant la norme de $\phi(P)$. La question 1.c amenait à évaluer les endomorphismes en un polynôme particulier, par exemple $X_1 X_2^2 \cdots X_n^n$. Plusieurs candidats se sont égarés en tentant des récurrences.

La question 2.b a encore une fois mis en évidence le manque de rigueur des candidats, qui ont souvent omis d'expliquer qu'on pouvait se ramener au cas de polynômes homogènes. Pour la question 3.a, peu de candidats ont expliqué pourquoi l'injectivité de γ_d impliquait sa surjectivité.

La question 3.b n'a que très rarement été traitée correctement : on déduisait de la question 1.c l'existence d'un polynôme annulateur de γ_d et la question 3.a permettait de choisir son terme constant égal à 1.

La question 3.e était astucieuse : on pose $u = \frac{k}{d+kN}\phi$ et on développe $\frac{1}{1-u}$ en série entière.

La partie V ne présentait pas de questions très difficiles, mais aucun candidat n'a trouvé le temps de la résoudre en entier. La question 1.a se résolvait explicitement : $P = \frac{1}{d+1}\sum_i X_i P_i$, comme ne l'ont vu que peu de candidats. Ceux qui ont tenté d'utiliser le lemme de Poincaré (voire de « point-carré ») n'ont pas justifié que la fonction obtenue était polynomiale. Les candidats ont peiné à mettre en place la récurrence nécessaire pour la question 1.b.

Peu de candidats ont abordé la dernière partie. La question 1.a se ramenait immédiatement au cas d'une variable en étudiant $f(\lambda x)$ comme une série entière en λ. La délicate question 3.a n'a été résolue par aucun candidat.