

EPREUVE ECRITE DE MATHÉMATIQUES MPI2

ENS : PARIS – LYON – CACHAN

Durée : 4 heures

Coefficients

MEMBRE DE JURY : F. Alouges, A. Grigis, G. Miermont et J.-C. Sikorav

Le problème consistait à étudier une fonctionnelle d'énergie intervenant dans un modèle de transition de phase possédant un paramètre qui mesurait l'inverse du carré de la taille des transitions. L'étude proposée suivait les principes de la G-convergence en fonction de l . Bien entendu, l'existence d'un minimiseur de la fonctionnelle (exigeant des méthodes Hilbertiennes) n'était pas demandée. Néanmoins, on caractérisait le comportement limite de la valeur de l'énergie des minimiseurs, en fonction de l . Le problème était décomposé en quatre parties de difficultés diverses.

La première partie permettait d'introduire un concept de dérivée faible indispensable pour la suite du problème (on utilisera par la suite très souvent des fonctions de comparaison qui sont seulement continues et C^1 par morceaux). Elle ne contenait pas de réelle difficulté mais permettait de distinguer les candidats précis et rigoureux et de les valoriser. Parmi les fautes récurrentes, certains dérivent froidement des fonctions continues et C^1 par morceaux (question I.1.a), ou intègrent directement par parties des fonctions non C^1 (question I.1.c), alors que l'on cherche essentiellement à démontrer que cette intégration par parties est possible. D'autres dans la question I.2, appliquent directement l'inégalité de Cauchy-Schwartz et concluent par une pirouette, alors que l'on attendait une redémonstration qui seule permettait de venir à bout correctement de la question. Enfin, peu de candidats utilisent les propriétés d'une intégrale en fonction de sa borne supérieure. Notons que l'imprécision de l'énoncé ; de la question I.1.b (qui rendait la question fautive) n'a heureusement pratiquement pas perturbé les candidats.

Le problème commençait réellement dans la partie II. De nombreuses assertions restent non justifiées (transformation d'une intégrale de $o(1)$ en $o(1)$ en question II.2.a), ou grossièrement fausses (dérivation de l'énergie par rapport à u en question II.2.b). La récurrence permettant de démontrer qu'une solution du problème de minimisation est de classe C^∞ est souvent bien faite, alors que le caractère C^1 est beaucoup plus aléatoire (question II.2.c). Des questions relativement faciles sont correctement réalisées (II.2.d) et celles vraiment difficiles (II.2.e, II.3) ont permis de repérer les bonnes copies. Attention à la minoration dans la question II.4.a qui est quelquefois « prouvée » à l'envers et dont le sens s'inverse miraculeusement à la dernière ligne. La réalisation de ces deux premières parties du problème permettait d'obtenir une note supérieure à 15.

La partie III contenait quatre questions. Deux (III.1 et III.2) n'étaient pas très difficiles (encore fallait-il être soigneux dans sa rédaction), et les deux autres (surtout la question III.3 qui n'a été réalisée que par un tout petit nombre de copies, et où il fallait faire intervenir le point de module maximal) étaient beaucoup plus délicates. Dans la question [III.4.a](#) peu de candidats ont constaté

qu'une majoration d'une somme de termes positifs suffit à majorer chacun d'eux.

La partie IV finissant la preuve du résultat de G-convergence et généralisant même ce résultat n'a quasiment pas été abordée.

En conclusion, cette épreuve a permis de faire la différence entre les candidats soigneux, précis et rigoureux de ceux qui l'étaient moins voire pas du tout. Elle contenait un éventail de questions de difficultés variées dans le but de répartir les copies sur toute la gamme de notes. Enfin parmi les candidats rigoureux, les plus rapides (et/ou les plus concis) ont été valorisés en pouvant aller plus loin dans le problème. Ce style de problème a donné; un avantage assez net aux candidats qui « comprenaient ce qui se passait » par rapport à ceux, beaucoup plus nombreux, qui réalisent l'épreuve sans prendre le temps de la réflexion et en essayant d'enchaîner les questions les unes après les autres.