

ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUE MPI 1

Commune aux ENS PARIS, LYON, CACHAN

Coefficients : PARIS 6, LYON 4, CACHAN 5

MEMBRES DE JURYS : Concepteur correcteur O. DEBARRE, Correcteurs R. CÔTE, O. GUICHARD, A. MÉZARD, M. WEILL

Le problème de mathématique pour la filière MP pour l'épreuve commune au trois ENS portait cette année sur l'étude du groupe $SL_n(\mathbf{Z})$ des matrices carrées d'ordre n , à coefficients entiers et de déterminant 1, et de ses sous-groupes finis. On montrait en particulier au cours du problème que l'ordre de tout tel sous-groupe divise à la fois $(2n)!$ et $\frac{1}{2}(3^n - 1)(3^n - 3) \dots (3^n - 3^{n-1})$.

Les groupes ne sont plus une partie centrale des programmes actuels, mais ils ne le sont en fait pas non plus dans le problème, qui est plutôt un prétexte pour appliquer quelques connaissances élémentaires d'arithmétique (essentiellement le théorème de Bézout et l'algorithme d'Euclide) et d'algèbre linéaire (ou plutôt matricielle) : opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice, forme réduite des matrices de rotations du plan et de l'espace, critères de diagonalisation des matrices.

La longueur du problème s'est révélée raisonnable, puisque toutes les questions ont pu être abordées dans les meilleures copies (dont 2 ont obtenu la note maximale), et son niveau abordable, puisque seule la question 16 est restée sans réponse.

La rédaction laisse parfois à désirer : on explique de plusieurs façons le même point, comme si l'on voulait se convaincre soi-même ; on gaspille du temps sur des questions faciles ; on passe en revanche rapidement sur des points délicats qui nécessitent des explications précises. Beaucoup de copies étaient cependant de grande qualité, montrant l'esprit d'initiative et d'invention que l'on attend des futurs normaliens.

L'objet de la première partie est de montrer que le groupe $SL_n(\mathbf{Z})$ est engendré par des matrices de transvection. C'est une question de cours pour les matrices à coefficients «dans un sous-corps de \mathbf{C} » ; pour les matrices à coefficients entiers, cela résulte de l'algorithme d'Euclide pour le calcul du pgcd.

La première question semble maintenant classique. Encore faut-il, pour ne pas perdre bêtement des points, soigner la rédaction et vérifier, en dehors du point central que l'inverse d'une matrice carrée à coefficients entiers, de déterminant 1, est encore à coefficients entiers, que le produit de deux telles matrices a encore les mêmes propriétés.

Les questions 2 et 3 sont faciles. Beaucoup de candidat(e)s réalisent que l'algorithme d'Euclide est à la base de la question 4, mais les rédactions sont trop souvent fumeuses et inutilement longues : plutôt que de vouloir à tout prix se raccrocher à des démarches vues en cours, il est parfois plus simple de s'en inspirer en adaptant les idées au cas précis dont on a besoin. Il ne fallait pas non plus oublier que l'on voulait obtenir le pgcd *positif*. La question 5 est facile ; il est possible, mais inutile, d'utiliser des opérations élémentaires sur les lignes.

La question 6.b) est difficile mais pas inabordable, puisqu'elle a été complètement résolue dans 7 copies. On peut soit montrer, comme dans le cours, que $SL_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ est aussi engendré par des matrices de transvection, soit, comme c'était suggéré dans l'énoncé,

utiliser la question 4 pour obtenir par opérations élémentaires, à partir d'une matrice carrée à coefficients entiers de déterminant 1 modulo p , une matrice congruente modulo p de première ligne $(1\ 0 \cdots 0)$.

Dans la seconde partie, on majore le cardinal des sous-groupes finis de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ par un nombre explicite ne dépendant que de n . On commence par étudier en détail les cas $n = 2$ ou $n = 3$. On peut bien sûr procéder par calcul brutal, mais il est plus élégant de remarquer qu'un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal (c'était l'objet de la question 7) et d'utiliser la forme réduite des rotations du plan et de l'espace apprise en cours, ce qu'extrêmement peu de candidat(e)s ont compris. Ceci explique que la question 9 n'a été que très rarement complètement bien traitée.

La question 11 ne présente pas de grande difficulté. Pour 11.c), on peut soit appliquer la question 11.a) au groupe $\psi_r(G)$ (en prenant garde au fait que ce groupe n'est pas toujours isomorphe à G), soit appliquer à la somme considérée la même astuce qu'en 11.a). La question 12.a) utilise une jolie astuce (donnée dans l'énoncé) ; la question 12.c) n'a été complètement traitée que dans une vingtaine de copies. La question 13.a) a été très souvent extrêmement mal rédigée (de nouveau, en essaye de se raccrocher à des choses déjà vues plutôt que de répondre directement et précisément à une question somme toute facile). Les questions 14 et 15 ne sont pas difficiles mais ont été peu traitées, étant placées à la fin d'une longue partie. La question 15.a) a parfois été résolue directement, sans faire appel à la question précédente (elle avait probablement été vue en préparation). La question 16 n'a reçu aucune réponse satisfaisante.

De nouveau, trop de candidat(e)s perdent des points par leur rédaction approximative dans des questions faciles.

Le résultat principal de la dernière partie est que tout morphisme de groupes surjectif de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ dans lui-même est bijectif.

La fatigue se fait sentir : dans la question 17, on oublie souvent des éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. La notion de sous-groupe engendré par une partie était définie dans l'introduction (elle n'apparaît au programme que sous la forme de «partie génératrice d'un groupe») mais a visiblement été vue dans beaucoup de préparations ; ce n'est pas toujours un avantage car les candidat(e)s se croient alors permis d'utiliser des «résultats» sans les justifier. Il est beaucoup plus simple de dire que si un morphisme de groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}) \rightarrow G$ est trivial sur chaque $M_{i,j}$, son noyau est $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ tout entier par définition, puisque c'est un sous-groupe qui contient tous les $M_{i,j}$, plutôt que d'utiliser la forme générale (parfois fausse) des éléments du sous-groupe engendré par une partie. La question difficile est la 19.b) (traitée dans 6 copies). La question 20 a été résolue dans 3 copies.