

EPREUVE ECRITE DE MATHEMATIQUES MPI2

ENS : PARIS – LYON – CACHAN

Coefficients : PARIS MP 4 – LYON 4 - CACHAN 5

MEMBRES DE JURY : V. BONNAILLIE-NOEL, E. GRENIER, A. GRIGIS, G. MIERMONT, J.-C. SIKORAV

Ce sujet est consacré à la caractérisation des espaces de Hölder de fonctions sur la droite par la transformation de Fourier, en utilisant la décomposition dyadique de Littlewood-Paley.

La première partie est consacrée à cette décomposition et à ses propriétés. Les trois premières questions étaient simples mais nécessitaient une certaine maîtrise technique. La plupart des candidats ont vu comment les résoudre, toutefois peu ont su les rédiger de façon claire, précise et concise. La rédaction de 1.3a s'étale souvent sur d'interminables pages, tout en omettant quelques étapes. Les questions 1.3b et 1.3c sont déjà sélectives. Il était possible de montrer très simplement dans 1.3b que les fonctions construites sont infiniment dérivables en utilisant les propriétés du quotient de deux fonctions, mais cela a été vu par très peu de candidats. Beaucoup ont éludé le problème, d'autres se sont relancés dans de très lourds calculs de dérivées. Pour 1.3c qui a été traité correctement par moins d'un quart des copies, il suffisait de voir que 1 était partout la somme d'au plus deux termes strictement positifs et donc que le minimum cherché était $\frac{1}{4}$ atteint en certains points.

Les questions 1.4 et 1.5 sont presque du cours : dérivation sous le signe intégral, Fubini. Il est important que les candidats rédigent de telles questions de façon précise et concise en même temps. Rappeler le théorème, ou clairement présenter ses diverses hypothèses est la meilleure méthode. Cela peut se faire rapidement et ne devrait pas prendre des pages, et ce sans oublier d'argument.

Pour 1.6 peu de candidats pensent à intégrer par parties, et beaucoup oublient certaines parties de la question, en particulier l'indépendance de l'intégrale par rapport à q . La question 1.7 est un doublon d'une partie de la question 1.6. Il n'est donc pas nécessaire de tout réécrire en détail mais il faut montrer qu'on domine la question en justifiant le résultat. La question 1.8 n'a été résolue que par un petit nombre de candidats. Beaucoup oublient de montrer que C est indépendant de q , et pour le deuxième point très peu de candidats voient qu'il faut estimer l'intégrand en fonction du support pour sortir les 2 à la puissance .

La complétude des espaces de Hölder en 2.1 pose problème et est prouvée dans moins d'une copie sur trois. Beaucoup de candidats ont déjà vu cette démonstration classique mais ils sont incapables de la refaire correctement. La suite de la question de 2.2 à 2.4, bien que sans difficultés particulières, est traitée dans moins d'une copie sur trois. Seules les meilleures copies dépassent 2.5 et parfois abordent la partie 3.

En conclusion le problème permettait de mettre en valeur les qualités d'analyse des candidats qui maîtrisent les techniques de majoration, minoration, découpage, et l'utilisation adéquate des théorèmes profonds du cours. Les meilleures copies ont résolu l'essentiel des deux premières parties, et parfois abordé quelques questions de la partie 3. Dans ces copies, la rédaction est excellente, à la fois rapide et complète, les premières questions étant brillamment résolues.