
ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUE MPI 1
ENS : PARIS, LYON ET CACHAN
COEFFICIENTS : PARIS 6, LYON 4, CACHAN 5
MEMBRE DE JURYS : Concepteur et rédacteur E. PEYRE, Correcteurs
R. CÔTE, O. GUICHARD, A. MÉZARD, M. WEILL.

Le problème de mathématiques de la filière MP pour l'épreuve commune aux trois ENS portait cette année sur le problème de Waring, c'est-à-dire sur la possibilité d'écrire tout entier comme somme de m puissances d -èmes, l'entier m ne dépendant que de la puissance d considérée.

La nature élémentaire d'un grand nombre de questions a permis aux candidats de s'exprimer, leur laissant la possibilité de mettre en valeur leurs qualités de raisonnement et de rédaction. Un grand nombre de copies dépassaient ainsi les 25 pages. Ceci dit, les candidats qui, avec un peu plus de recul vis-à-vis de l'énoncé, surent trouver des solutions élégantes évitant un calcul lourd ou une discussion de cas compliquée sont en général allés plus loin dans le problème et ont obtenu de meilleures notes. Rappelons que la concision et la clarté font partie des qualités appréciées des correcteurs.

Enfin, bien que des erreurs d'énoncé puissent malheureusement se produire, les correcteurs ne peuvent que recommander la prudence aux candidats qui pensent en avoir trouvé une. Dans ce cas, une relecture plus attentive de l'énoncé peut souvent se révéler fructueuse.

Le début de la première partie portait sur une question de combinatoire classique sur la partition des entiers. La solution suggérée par l'énoncé pour la question 1.c reposait sur une double récurrence. Une rédaction soignée suffisait pour mener à bien cette question. Il est regrettable que certains candidats aient voulu utiliser pour cette question des principes de récurrence généralisés qu'ils ne maîtrisaient pas. Dans la question 1.d, l'utilisation de la formule de Stirling, d'ailleurs hors programme, compliquait inutilement cette question élémentaire.

La suite de la partie I portait sur l'impossibilité d'écrire certains entiers comme somme de trois carrés. La première question délicate était la question 2.c. La plupart des candidats ont eu l'idée de se ramener aux entiers, mais peu ont réalisé qu'il était possible de se réduire au même dénominateur de façon à se ramener à une équation du type

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (8b - 1)T^2$$

avec un des entiers X, Y, Z ou T impair ce qui permettait d'appliquer directement la question précédente.

La partie II portait sur le théorème de Lagrange, c'est-à-dire l'écriture de tout entier comme somme de quatre carrés. Dans la question 1.d la principale difficulté résidait dans la démonstration de la majoration demandée, qui s'obtenait aisément si on remarquait qu'on pouvait remplacer x (resp. y) par $p - x$ (resp. $p - y$). Les questions sur l'algèbre de quaternions ne présentaient que peu de difficultés, mais les candidats devaient savoir qu'il ne suffit pas de promettre qu'un calcul fournit le résultat : il faut, ou bien faire le calcul, ou bien utiliser une méthode évitant le calcul, ce qui est évidemment préférable. La question la plus délicate de cette partie était la question 4.d.(i) où la démonstration des inégalités demandait d'utiliser avec soin les hypothèses et le fait que m_0 est impair. Trop de candidats ont omis de vérifier dans la question 5 que les entiers 0, 1 et 2 appartiennent bien à l'ensemble \mathcal{N}_2^4 .

Dans la partie III, peu de candidats ont observé que tout entier t s'écrit comme somme de M puissances d -èmes pour tout entier d et tout entier M supérieur ou égal à t , ce qui permettait de montrer que la finitude de $G(d)$ entraîne celle de $g(d)$.

La partie IV ne présentait pas de difficulté et a été bien traitée par la majorité des candidats.

La partie V constitue le début de la méthode du cercle, basée sur une majoration de sommes d'exponentielles. La question V.2.b était une des questions les plus délicates du problème, mais elle a été bien traitée par les meilleurs candidats, qui ont raisonné soit par récurrence, soit avec un développement judicieux des puissances n -èmes. Pour mener à bien cette question, il fallait bien sûr réaliser que le n de la question coïncidait avec le n de la définition de ϕ . La question 5.b est un des points-clefs de cette partie et fait intervenir les questions 1, 3, 4.c et 5.a. À partir de la question 9, la fatigue se faisait sentir et les questions demandant de la réflexion n'ont plus été traitées.

Pour terminer, rappelons que le barème a pour objet de départager les candidats et de sélectionner les futurs normaliens. En particulier, contrairement à un examen, la note de 10 n'a aucune signification particulière.