

# Rapport sur l'oral de mathématiques 2007

Oral spécifique E.N.S. Paris : Olivier Debarre

Oral commun Paris-Lyon-Cachan : Laurent Berger, Sorin Dumitrescu, Romain Abraham.

## 1 Remarques générales sur la session 2007

Le jury de l'oral spécifique Ulm a été frappé par l'excellent niveau général des candidats et de leur préparation à cette épreuve, alors que le nombre d'heures d'enseignement des mathématiques dans le secondaire ne cesse de diminuer au gré des réformes et des modes. Ceux-ci sont en général réfléchis, disent peu de « bêtises », et comme d'habitude, les tout meilleurs sont vraiment très impressionnants par leur culture et leur maturité.

## 2 Commentaires d'ensemble

Certaines recommandations de l'an dernier sont reconduites. Le jury espère qu'elles finiront par être prises en compte.

- Il est bon de s'écartier régulièrement du tableau pour laisser l'examineur voir ce qu'on y a écrit.

- Inutile d'effacer sans arrêt ce qu'on écrit, avant même de savoir si ce sera utile ou non : le tableau est grand.

- Il faut trouver un juste équilibre entre un mutisme total et un flot de paroles ininterrompu (comment peut-on réfléchir dans ces conditions?). Le jury apprécie de savoir où en est le candidat de ses réflexions, mais il n'est pas sûr qu'il soit dans l'intérêt du candidat de raconter tout ce qui lui passe par la tête.

- Il est regrettable que très peu de candidats proposent de faire un dessin et de donner une interprétation géométrique aux exercices.

### 3 Commentaires mathématiques de détail

Beaucoup de candidats abusent des démonstrations par l'absurde, souvent inutiles.

Les candidats sont friands de la notation  $\sum$ , mais elle les empêche souvent de voir ce qui se passe. En particulier, un candidat sur deux confronté au problème n'a pas reconnu un carré dans  $\sum_{i,j} a_i a_j$ . Beaucoup ne pensent pas non plus à écrire  $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$  comme  $\frac{1-x^n}{1-x}$ .

La géométrie affine n'est pas maîtrisée : c'est le règne du tout vectoriel. Il est vrai que le programme officiel est très mal fait sur ce sujet, puisque malgré un chapitre intitulé « Algèbre linéaire et géométrie affine » et des exhortations à l'« étude des concepts fondamentaux relatifs à la géométrie affine réelle », plus aucune mention n'en est faite dans les points détaillés par la suite.

Il est tout de même regrettable que des candidats s'étonnent que par trois points passe un plan, et ne sachent pas écrire l'équation d'un hyperplan affine en coordonnées. Montrer que l'aire d'un triangle dans le plan dont les sommets sont à coordonnées entières est un demi-entier a aussi mis en difficulté de nombreux candidats.

En algèbre linéaire, la part importante que le programme accorde à la réduction des endomorphismes fait que toute matrice (complexe) est immédiatement trigonalisée, que cela soit utile ou non. L'équivalence est souvent oubliée.

### 4 Quelques exercices posés à l'oral spécifique Ulm

- Existe-t-il une suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  de réels tels que pour tout  $n$ , le polynôme  $a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$  ait exactement  $n$  racines réelles distinctes ?

- Soit  $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de nombres complexes non nuls vérifiant  $|z_m - z_n| \geq 1$  pour tout  $m \neq n$ . Montrer que la série  $\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{z_n^3}$  converge.

- Soient  $a, b$  et  $c$  des réels strictement positifs non nuls distincts deux à deux. Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telles que

$$f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0$$

pour tout réel  $x$ .

- Soit  $S$  un sous-ensemble du plan euclidien  $\mathbf{R}^2$  vérifiant la propriété

$$\forall p \in \mathbf{R}^2 \quad \exists s \in S \quad \|p - s\| \leq 1$$

Montrer que tout polynôme de  $\mathbf{R}[X, Y]$  qui s'annule sur  $S$  est identiquement nul.

- 1) Dans le plan affine euclidien  $\mathbf{R}^2$ , quels sont les triangles d'aire maximale contenus dans un disque donné ?

- 2) Dans l'espace affine euclidien  $\mathbf{R}^3$ , quels sont les tétraèdres de volume maximal contenus dans une boule donnée ? Quels sont les tétraèdres de volume minimal contenant cette boule ?

- On définit une application  $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$  en posant  $u(t) = (t, t^2, \dots, t^n)$ . On se donne un entier  $d > n \geq 2$  et des réels  $t_1 < \dots < t_d$ .

- 1) Pour tout sous-ensemble  $S$  de  $\{1, \dots, d\}$  de cardinal  $n$ , montrer qu'il existe un unique hyperplan affine contenant les points  $u(t_i)_{i \in S}$ . On le note  $H_S$ .

- 2) À quelle condition nécessaire et suffisante sur  $S$  tous les  $u(t_i)$ , pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  sont-ils contenus dans le même demi-espace défini par  $H_S$  ?

- 3) Combien y a-t-il de tels sous-ensembles  $S$  ?

- Soit  $T$  un triangle dans le plan affine euclidien  $\mathbf{R}^2$ , dont les sommets  $A, B$  et  $C$  sont entiers (c'est-à-dire à coordonnées entières).

- 1) Montrer que si  $T$  est d'aire  $1/2$ ,  $T$  n'a aucun point entier en dehors de ses sommets.

- 2) On suppose que  $T$  n'a aucun point entier en dehors de ses sommets. Montrer que pour tout point entier  $M$ , le vecteur  $\overrightarrow{AM}$  est combinaison linéaire à coefficients entiers des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ . En déduire que  $T$  est d'aire  $1/2$ .

- 3) On suppose que  $T$  n'a aucun point intérieur entier. Peut-on majorer l'aire de  $T$  ?

- 4) On suppose que  $T$  a exactement un point intérieur entier. Peut-on majorer l'aire de  $T$  ? Peut-on majorer le nombre de points entiers de  $T$  ?

• 1) Soient  $P, Q$  et  $R$  des polynômes non nuls de  $\mathbf{C}[X]$ , non tous constants, premiers entre eux deux à deux et tels que  $P + Q + R = 0$ . Soit  $p$  le nombre de racines (complexes) distinctes de  $P$ , soit  $q$  le nombre de racines (complexes) distinctes de  $Q$  et soit  $r$  le nombre de racines (complexes) distinctes de  $R$ . Montrer que chacun des polynômes  $P, Q$  et  $R$  est de degré strictement inférieur à  $p + q + r$  (Indication : on pourra considérer le polynôme  $\Delta = PQ' - P'Q$ ).

2) En déduire, pour  $n \geq 3$ , toutes les solutions dans  $\mathbf{C}[X]$  de l'équation

$$A^n + B^n + C^n = 0$$

avec  $ABC \neq 0$ .

• Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  tel que  $u(\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ .

1) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . À quelle condition nécessaire et suffisante sur  $M$  existe-t-il une matrice  $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$  telle que  $P - \lambda M$  soit inversible pour tout  $\lambda \in \mathbf{C}$ ? En déduire  $u^{-1}(\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ .

2) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . Montrer qu'il existe une matrice  $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$  telle que  $P - \lambda M$  soit non inversible pour exactement  $\mathrm{rang}(M)$  valeurs de  $\lambda$ . En déduire  $\mathrm{rang}(u(M)) \geq \mathrm{rang}(M)$  pour tout  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ .

3) Montrer  $\mathrm{rang}(u(M)) = \mathrm{rang}(M)$  pour tout  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ .

• 1) Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ . On définit une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$   $f_n : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$  en posant, pour tout  $x \neq 0$ ,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{1}{n!}x^n f_n(x) \quad (1)$$

Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^k f_n^{(k)}(x)$$

pour chaque  $k \in \{0, \dots, n\}$ .

2) Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{2r}$  *paire*. Montrer qu'il existe une fonction  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^r$  telle que  $f(x) = g(x^2)$  pour tout réel  $x$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , peut-on prendre  $g$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ?

3) Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{2r+1}$  *impaire*. Montrer qu'il existe une fonction  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^r$  telle que  $f(x) = xg(x^2)$  pour tout réel  $x$ .

## 5 Quelques exercices posés à l'oral commun Ulm-Lyon-Cachan

• Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite de nombre réels avec la propriété que  $x_{n+1} \leq px_n + (1-p)x_{n-1}$ , pour tout  $n \geq 2$  et pour une certaine constante réelle  $p \in ]0, 1[$ . Montrer que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  admet une limite quand  $n$  tend vers l'infini.

• Soit  $SL_2(\mathbf{R})$  le groupe multiplicatif des matrices de taille  $(2, 2)$  et de déterminant égal à 1.

Caractériser les éléments  $A$  de  $SL_2(\mathbf{R})$  tels que, quelque soit  $x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ , l'ensemble des vecteurs  $\{A^n(x), n \in \mathbf{Z}\}$  est non borné dans  $\mathbf{R}^2$ .

• Soit  $SL_2(\mathbf{Z})$  le groupe multiplicatif des matrices de taille  $(2, 2)$ , à coefficients entiers et de déterminant égal à 1.

Montrer que si  $A \in SL_2(\mathbf{Z})$  est tel que  $A^n = I_2$  pour un certain  $n \in \mathbf{N}^*$ , alors il existe  $p \in \mathbf{N}^*$ ,  $p \leq 6$  tel que  $A^p = I_2$ .

• Soit  $M_n(\mathbf{R})$  l'espace vectoriel des matrices réelles de taille  $(n, n)$

(1) Montrer que  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B)$  définit un produit scalaire sur  $M_n(\mathbf{R})$ , où  $\text{tr}$  désigne la trace et  $A^t$  la transposée de la matrice  $A$ .

Dans la suite  $\|\cdot\|$  désigne la norme associée au produit scalaire précédent.

(2) Soit  $A \in M_n(\mathbf{R})$ . Calculer la différentielle en 0 de l'application  $f : M_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(W) = \|A - e^W\|^2$ .

(3) Supposons que  $\|A - Id\| \leq \|A - U\|$ , quelque soit  $U$  matrice orthogonale. Montrer que  $A$  est symétrique.

(4) En déduire, que pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbf{R})$  il existe une matrice symétrique  $S$  et une matrice orthogonale  $U$  telle que  $A = US$ .

• Soit  $M_n(\mathbf{C})$  l'espace vectoriel des matrices complexes carrées de taille  $(n, n)$  et  $M \in M_n(\mathbf{C})$  une matrice diagonale.

(1) Calculer la dimension de l'espace vectoriel complexe  $\text{Comm}(M) = \{A \in M_n(\mathbf{C}), AM = MA\}$ .

(2) Pour chaque  $N \in M_n(\mathbf{C})$  on définit  $\varphi_N : M_n(\mathbf{C}) \rightarrow M_n(\mathbf{C})$  telle que  $\varphi_N(A) = AN - NA$ , pour tout  $A \in M_n(\mathbf{C})$ . Montrer que pour tout  $p \in \mathbf{N}$ , l'ensemble  $\{N \in M_n(\mathbf{C}), \text{rank}(\varphi_N) \geq p\}$  est un ouvert.

(3) Montrer que la dimension de  $\text{Comm}(N)$  est  $\geq n$ , pour tout  $N \in M_n(\mathbf{C})$ .

• Soit  $SL_2(\mathbf{R})$  le groupe multiplicatif des matrices de taille  $(2, 2)$  et de déterminant égal à 1.

(1) Déterminer les morphismes continus du groupe additif  $\mathbf{R}$  dans le groupe multiplicatif  $\mathbf{R}^*$ .

(2) Déterminer les morphismes de groupes continus du groupe additif  $\mathbf{R}$  dans  $SL_2(\mathbf{R})$ .

• Montrer que  $\exp : M_n(\mathbf{R}) \rightarrow M_n(\mathbf{R})$  réalise un homéomorphisme entre les matrices symétriques et les matrices symétriques définies positives.

• Soit  $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$  continue et telle que pour tout  $x > 0$ , la suite  $f(nx)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

(1) Si  $f$  est périodique, montrer que  $f$  est identiquement nulle.

(2) Si  $f$  est uniformément continue, montrer que  $f$  tend vers 0 à l'infini.

(3) Montrer que  $f$  tend vers 0 à l'infini.