
ÉPREUVE ORALE DE MATHÉMATIQUES

ENS CACHAN

Durée : 45 minutes Coefficient : 12

Membres du jury : J.-F. AUJOL, F. PASCAL, G. Vial

Lors de cette épreuve orale de mathématiques pour laquelle il n'y a pas de temps de préparation, le jury cherche à vérifier l'acquisition des connaissances et surtout à mesurer la capacité de réaction face à un problème le plus souvent nouveau et original. Rappelons que l'ENS de Cachan prépare aux métiers d'enseignant, d'enseignant-chercheur, de chercheur, d'ingénieur...

En ce qui concerne l'acquisition des contenus des programmes de classe préparatoire, le jury note un bon niveau général. Toutefois, quelques candidats se distinguent par un oral très médiocre, maîtrisant à peine les outils élémentaires. Il convient de souligner que l'étalement des notes reflète la volonté d'utiliser la grille entière plutôt qu'un jugement absolu sur la valeur intrinsèque des candidats.

Lorsqu'il s'agit de mesurer les capacités de réaction voire de créativité des candidats, les résultats sont parfois très décevants. Certains candidats semblent complètement dépendants de l'examineur, d'autres incapables d'écouter les propositions qui leur sont faites ou d'en tirer parti, enfin certains s'enferment dans un mutisme qui ne facilite pas le déroulement de l'épreuve (rappelons qu'il s'agit d'une épreuve orale : écrire un début de solution correcte sur le tableau après un quart d'heure de silence absolu ne saurait satisfaire l'examineur). La difficulté, parfois très réelle, de certains exercices, doit permettre au candidat de montrer son aptitude à l'analyse du problème posé, à sa simplification (parfois à l'extrême), dans le but de progresser dans sa compréhension et dans l'éventuelle solution du problème de départ. Ceux qui ont su montrer leur autonomie dans l'attaque d'un problème, tout en tenant compte des remarques à bon escient, ont été généralement récompensés. Le jury est sensible à la clarté et la pertinence des arguments donnés par les candidats, qu'ils soient écrits ou oraux. Il est d'ailleurs inutile d'écrire au tableau un argument totalement justifié oralement, cela constitue plutôt une perte de temps. Enfin il est déconseillé aux candidats de montrer ostensiblement qu'un exercice ne leur plaît pas.

Concernant les mathématiques, les principaux résultats d'algèbre et d'analyse sont bien maîtrisés. Le jury est frappé par l'absence d'intuition de nature géométrique ou de la capacité à visualiser et/ou représenter par un dessin le problème considéré ou le cheminement de sa démonstration. S'il est vrai qu'un dessin n'est pas a priori une démonstration, il permet, lorsque bien fait, d'aider à trouver le raisonnement conduisant au résultat et il est souvent plus proche de la démonstration qu'une succession de formules qui n'aboutissent pas et un long discours. La capacité à faire un dessin générique fait trop souvent défaut, alors qu'elle devrait être encouragée.

Enfin, le jury tient à relever certaines lacunes récurrentes :

- lorsqu'il s'agit de montrer qu'une matrice symétrique est définie positive, la grande majorité des candidats entreprend de déterminer ses valeurs propres, sans se rendre compte que ce problème est généralement d'une complexité bien supérieure à la considération du produit scalaire $\langle Ax, x \rangle$;
- le calcul différentiel reste un domaine mal maîtrisé, qui semble pétrifier certains candidats. Pourtant seules des connaissances élémentaires sont requises ; il s'agit le plus souvent de se ramener à une fonction d'une variable réelle, en considérant des fonctions d'une variable réelle du type $t \mapsto f(tx + (1-t)y)$ ou $t \mapsto f(t, t)$;

- le jury note que les candidats ne sont pas à l’aise avec la notion de convexité, même dans ses aspects les plus élémentaires ;
- si la définition d’une norme subordonnée est généralement connue, peu d’exemples de telles normes matricielles le sont. En particulier, les normes subordonnées 1, 2, ∞ , et leurs caractérisations, sont souvent découvertes lors de l’oral ;
- le théorème de Dirichlet pour les séries de Fourier semble bien connu, avec les bonnes hypothèses, ce qui n’est pas le cas pour l’égalité de Parseval (aucune dérivabilité n’est requise pour cette dernière) ;
- le lien entre rayon de convergence et comportement asymptotique des dérivées successives d’une fonction est rarement mentionné, alors qu’il fournit une caractérisation pour les fonctions développables en série entière ;
- de manière étonnante, les conditions suffisantes d’optimalité d’ordre 1 pour une fonction d’une variable réelle sont méconnues et des candidats semblent penser qu’un point d’annulation de la dérivée est nécessairement un extremum local ;
- la plupart des candidats reconnaît une somme de Riemann dans l’approximation d’une intégrale par la méthode des rectangles, mais trop peu savent obtenir rapidement une estimation de l’erreur commise pour une fonction de classe \mathcal{C}^1 , qui est pourtant une conséquence immédiate de l’inégalité des accroissements finis ;
- pour montrer qu’une matrice A est inversible, on peut parfois vérifier que $\|I - A\| < 1$, l’inverse étant alors donnée par la série de Neumann $\sum A^n$.