
Épreuve écrite de mathématiques MPI 1 commune aux ÉNS : Paris, Lyon et Cachan
Coefficients : Paris 6, Lyon 4, Cachan 5

Jury : Antoine CHAMBERT-LOIR (concepteur et rédacteur), Stéphane DRUEL, Olivier GUICHARD, Ariane MÉZARD, Benjamin SCHRAEN (correcteurs)

Le problème de cette épreuve commune aux trois Écoles normales supérieures était consacré à des questions de *combinatoire additive*, c'est-à-dire à des propriétés combinatoires des groupes abéliens. En l'occurrence, il s'agissait d'élucider la structure des parties finies et non vides A de \mathbf{Z} pour laquelle le rapport $\sigma = \text{Card}(A + A) / \text{Card}(A)$ est petit ; de telles parties sont proches d'une progression arithmétique « multidimensionnelle ». L'objet principal du sujet était ainsi la démonstration du théorème de Freiman affirmant l'existence d'un nombre réel strictement positif c tel que pour toute partie finie et non vide A de \mathbf{Z} , il existe un entier naturel $\delta \leq c\sigma^3(\log \sigma)^2$, des entiers naturels m_1, \dots, m_δ dont le produit M vérifie $M \leq \text{Card}(A) \exp(c\sigma^3(\log \sigma)^2)$ et des entiers relatifs x_0, \dots, x_δ de sorte que tout élément de A soit de la forme $x_0 + \sum_{i=1}^{\delta} n_i x_i$, où n_1, \dots, n_δ sont des entiers naturels vérifiant $0 \leq n_i < m_i$.

Si le principe du théorème de Freiman remonte aux années 70, la démonstration proposée reprend les arguments dus à Rusza et Chang qui fournissent des majorations plus précises. Nous nous sommes aussi inspirés de notes de Ben Green.

Malgré les multiples relectures que ce problème a subies, son auteur regrette d'y avoir laissé subsister trois erreurs. Comme quelques candidats l'ont remarqué, il manquait une hypothèse dans la question III.6.b) ; supposer N impair était suffisant et inoffensif pour les applications aux parties IV et V. Par ailleurs, dans la question IV.4, il fallait poser $\alpha = \text{Card}(A) / N$. Enfin, dans le début de la partie V, dans la définition d'une application k -tendue, il fallait lire $f(x_1) + \dots + f(x_k) = f(y_1) + \dots + f(y_k)$. Ces erreurs d'énoncé ne semblent pas avoir trop gêné les candidats ; nous en avons tenu compte dans la correction.

La première partie traitait de propriétés élémentaires des groupes abéliens. On y démontrait quelques majorations, élémentaires mais utiles ; on y voyait aussi les premiers exemples pour lesquels une petite constante σ conditionne la structure de la partie A .

La question 1 était de nature combinatoire ; pour a), la formule de Pascal était souvent (inutilement) redémontrée ; la question c) a fait l'objet d'inesthétiques récurrences.

Dans la question 2, plusieurs candidats semblaient penser qu'un groupe abélien fini est de la forme $\mathbf{Z} / n\mathbf{Z}$.

La question 3 a été l'occasion pour plusieurs candidats d'écrire l'inclusion $A \subset A + B$ (parfois vraie, par exemple si $0 \in B$, mais inexacte en général) ; de nombreuses copies tentaient de déduire l'inégalité du b) de la question 1 en majorant (à tort) $\text{Card}(nA)$ par $\text{Card}(A) / n!$.

La question 4, a) a été traitée de nombreuses façons ; le b) a posé plus de difficultés.

Beaucoup de candidats ont mélangé allègrement notations additives et multiplicatives dans la question 5, écrivant des choses telles que $g^{-1} + A$.

L'inégalité triangulaire de la question 6 n'a été que peu traitée ; commencer par expliciter en termes de cardinaux l'inégalité à démontrer était un bon début qui pouvait donner l'idée d'une démonstration.

La seconde partie du problème traitait de formes quadratiques définies positives. Son résultat principal (question II, h)), dû à Hermite, visait à remplacer pour ce sujet l'utilisation que Rusza et Chang font du second théorème de Minkowski. La majoration de Hermite est un peu plus faible, ce pourquoi le théorème final du problème est de moins bonne qualité que celle du théorème de Rusza et Chang.

La formule $A^t \text{com}(A) = \det(A)I_n$ était présente dans la plupart des copies mais beaucoup ne surent pas l'utiliser correctement pour établir la question 1.

Dans la question 2, les candidats n'ont pas su utiliser les indications de l'énoncé.

La question 3, plus réussie, a vu quelques bizarreries, notamment une séparation en deux cas, suivant que u est inversible ou non. Le plus simple était de calculer la matrice de la forme quadratique $\Phi \circ u$.

De nombreuses erreurs dans la question 4 ; il fallait utiliser qu'une partie bornée de $\mathbf{Z}^n \setminus \{0\}$ est compacte (en fait, finie), ce qui n'est pas le cas d'une partie bornée de $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ en général. La question c), une simple version de la méthode de Gauss, s'est avérée plus redoutable que prévu ; pour certains candidats, la racine carrée d'un polynôme de degré 2 est bien sûr une forme linéaire. La question d) a posé d'innombrables difficultés ; paradoxalement, la méthode bien comprise pour les questions e) et f) permettait d'aborder la positivité de Φ_1 . Enfin, les récurrences des questions g) et h), certes délicates, étaient souvent mal rédigées.

La partie III, consacrée à quelques techniques d'analyse de Fourier, était apparemment plus abordable — relativement bon traitement des questions 2 et 3 — même si les candidats, voulant respecter l'ordre du problème, n'ont pas osé s'y attaquer d'emblée. Malgré tout, la première question a fait des ravages, même dans les meilleures copies : la condition $\omega^a \neq 1$ (pour a non nul dans $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$) n'était souvent pas vérifiée, d'autres affirment que la multiplication par a est un isomorphisme si a n'est pas nul.

Si la question 4 a) ressemblait dans l'esprit et dans la méthode de la caractérisation d'une base d'un espace vectoriel comme une partie libre maximale, cette proximité a amené de nombreuses confusions.

La question 5 a) n'a posé que peu de problèmes, bien qu'on ait vu quelques erreurs dans le calcul de la dérivée seconde ; nombre de copies n'ont pas su exploiter la convexité du a) pour démontrer la question b). La majoration du c) se traitait facilement en considérant les développements en série entière des deux membres. Dans toute cette question, les études de fonctions faites trop naïvement n'aboutissaient pas.

La question 6, assez bien traitée dans l'ensemble, est l'une des dernières questions abordées avec succès dans cette partie.

Les deux dernières parties du problème démontraient le théorème de Freiman proprement dit. La partie IV établissait, pour toute partie non vide A de $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, l'existence d'une progression arithmétique à l'intérieur de la partie $2A - 2A$ de dimension et taille contrôlées par le cardinal de A et le quotient $\sigma = \text{Card}(A + A) / \text{Card}(A)$. Les arguments

géométriques, fondés sur la partie II, montraient l'existence d'une telle progression dans un ensemble $\mathcal{B}(K, r)$; les résultats de la partie III permettaient alors de conclure.

Cette partie IV n'a été que peu traitée, de nombreux candidats préférant passer directement à la partie V et en résoudre les deux premières questions, généralités assez faciles sur les applications *tendues* (*Freiman isomorphisms* dans la terminologie anglaise). De telles applications permettent de transférer des propriétés combinatoires d'un groupe abélien à un autre, même s'ils ne sont pas isomorphes. La question 4 démontrait ainsi qu'une partie de \mathbf{Z} contient une partie de cardinal contrôlé qui est k -semblable à une partie d'un groupe $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, pourvu que N soit assez grand.

Deux résultats étaient admis dans cette partie. Le premier est le « postulat de Bertrand » qui affirme, pour tout entier $n \geq 1$, l'existence d'un nombre premier compris entre n et $2n$; la démonstration de Tchébitcheff est accessible aux élèves des classes préparatoires et se trouve dans de nombreux ouvrages élémentaires de théorie des nombres. Le second résultat admis est une inégalité, due à Plünnecke, qui majore de façon non triviale le cardinal d'un ensemble de la forme $mA - nA$, où A est une partie non vide d'un groupe abélien. Cette inégalité repose sur un résultat classique de théorie des graphes (existence de chemins disjoints reliant deux parties des sommets en nombre égal au cardinal d'une séparatrice minimale), appliqués à des graphes convenablement construits à partir de parties d'un groupe abélien.

Ces deux résultats auraient pu faire l'objet de parties du problème mais cela en aurait augmenté inutilement la longueur. En outre, leurs démonstrations, quoique conformes à la lettre du programme des classes préparatoires, n'en respectent pas vraiment l'esprit.

Concluons ce rapport en regrettant le peu de soin que de nombreux candidats apportent à la présentation de leur copie, voire la confondent avec leur brouillon.