# Rapport sur l'oral de mathématiques 2010

Oral spécifique E.N.S. Paris : Thomas Duquesne
Oral commun Paris-Lyon-Cachan : Vincent Calvez, Bertrand Deroin, Philippe Gille.

## 1 Remarques générales sur la session 2010

Le jury a noté l'excellent niveau général des candidats : cela est d'autant plus remarquable que le nombre d'heures de cours en mathématiques ne cesse de baisser dans l'enseignement secondaire alors que les programmes des classes préparatoires se maintiennent globalement dans leur étendue.

## 2 Commentaires d'ensemble

Les recommandations des années passées sont reconduites. Le jury espère qu'elles finiront par être prises en compte.

• Il est bon de s'écarter régulièrement du tableau pour laisser l'examinateur voir ce qu'on y a écrit.

• Inutile d'effacer sans arrêt ce qu'on écrit, avant même de savoir si ce sera utile ou non : le tableau est grand.

• Il faut trouver un juste équilibre entre un mutisme total et un flot de paroles ininterrompu (comment peut-on réfléchir dans ces conditions ?). Le jury apprécie de savoir où en est le candidat de ses réflexions, mais il n'est pas sûr qu'il soit dans l'intérêt du candidat de raconter tout ce qui lui passe par la tête. Il ne faut par ailleurs pas être surpris de voir l'examinateur quitter la salle quelques minutes en début d'épreuve pour laisser justement au candidat un temps de réflexion.

• L'examinateur ne cherche *jamais* à induire en erreur le candidat. Lorsque le candidat se trompe ou commet une bourde, il lui est toujours donné une occasion de se rattrapper ou de se corriger.

• Les exercices posés sont parfois longs : ne pas en venir à bout n'est pas nécessairement pénalisant. L'objectif de l'interrogation n'est pas de terminer (ou de faire terminer) tel ou tel exercice. Il s'agit plutôt d'une discussion visant à évaluer les connaissances et, dans une certaine mesure, les capacités mathématiques du candidat.

• Certains exercices sont laissés ouverts à dessein, afin de tester la capacité d'analyse du candidat ainsi que l'organisation de ses connaissances. La stratégie qui consiste à analyser le problème sur quelques cas particuliers est appréciée à sa juste valeur.

• Le candidat doit bien écouter l'énoncé demandé ; certains donnent machinalement la solution d'un exercice qu'ils connaissent sans se rendre compte qu'elle ne répond pas exactement à la question posée.

# 3 Commentaires mathématiques de détail

Bien que les exercices donnés aux oraux des ENS soient difficiles, il est nécessaire que les candidats sachent se débrouiller honorablement des questions simples ou peu techniques que le jury est amené (immanquablement) à leur poser ; nous ne dirons jamais assez qu'il faut maîtriser son cours. Mentionnons quelques lacunes fréquentes : le critère de prolongement en 0 d'une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$, les hypothèses du théorème des fermés emboités, la résolution rigoureuse d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre. Par ailleurs, il est bon de pouvoir prouver rapidement dans le cas de la dimension 2 les résultats du programme d'algèbre linéaire.

Malgré l'excellent niveau général, on peut regretter que la correspondance endomorphismes/matrices pose parfois problème, ainsi que l'utilisation de matrices non carrées. La manipulation d'inégalités et de valeurs absolues est parfois peu rigoureuse. Le raisonnement par l'absurde est fréquemment utilisé en première approche et de façon un peu abusive. De nombreux candidats affirment procéder par "analyse-synthèse", ce qui peut être en effet une démarche efficace pour progresser dans la solution, mais ils doivent alors éviter les embrouillaminis logiques et tenir rigoureusement le fil de leur argumentation.

De manière générale, les exercices d'analyse posent beaucoup de problèmes aux candidats qui ont du mal à majorer de manière adéquate les quantités apparues et pensent rarement à séparer l'expression obtenue en plusieurs termes afin de majorer chaque terme séparément. Le réflexe consistant à identifier les cas d'égalité est bénéfique. Certaines intégrations par parties délicates réclament une grande vigilance concernant l'intégrabilité des fonctions en jeu. Le candidat doit faire preuve d'esprit critique à chaque étape afin de ne pas faire apparaître des quantités vides de sens. Par ailleurs, il serait bon que les candidats puissent citer correctement le théorème de Cauchy-Lipschitz lorsqu'ils l'invoquent (théorème dont l'usage n'est pas toujours nécessaire).

Les débordements du programme de certaines classes préparatoires ne rendent pas service à tous les candidats ! Certains croient se souvenir d'une solution, ce qui paralyse leur réflexion ; d'autres recrachent des notions mal assimilées, ralentissant considérablement le déroulement de l'oral. Signalons un recours trop systématique, et souvent peu pertinent, au polynôme minimal qui est une notion hors programme. Signalons encore que les raisonnements "par densité" en algèbre linéaire conduisent parfois à des contresens.

Mentionnons enfin que, pour trouver une condition nécessaire et suffisante, obtenir après quelques manipulations aléatoires un certain nombre de conditions nécessaires et espérer ensuite qu'elles seront suffisantes ne constitue pas une démarche satisfaisante.

# 4 Quelques exercices posés à l'oral spécifique Ulm

• On munit $C([0,1],\mathbb{R})$ de la norme uniforme $\|\cdot\|$ et on pose

$$K = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) : |f(x) - f(y)| \leq |x-y| \, , \; x, y \in [0,1]\} \, .$$

Pour tout $\delta > 0$, on note $N(\delta)$ le nombre minimal de boules ouvertes de rayon $\delta$ qui sont nécessaires pour recouvrir $K$. Estimer $\log(\log N(\delta))$ lorsque $\delta$ tend vers 0.

• Soit $N$, un entier plus grand que 2. On note $E_N$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $u : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$, qui sont périodiques en chaque coordonnée. On définit l'endomorphispme $D$ sur $E_N$ par

$$Du(p,q) = 4u(p,q) - u(p+1,q) - u(p-1,q) - u(p,q+1) - u(p,q-1)$$

pour tout $u \in E_N$ et tout $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$. On note $P_N$ le polynôme caractéristique de $D$. Donner un équivalent de $-\log(-P_N'(0))$ lorsque $N$ tend vers l'infini.

• On note $E$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ qui sont 1-périodiques. On définit l'endomorphisme $T$ sur $E$ en posant

$$Tf(x) = f(x+\sqrt{2}) - f(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Trouver le noyau et l'image de $T$.

# 5 Quelques exercices posés à l'oral commun Ulm-Lyon-Cachan

• Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe $V$ de dimension finie $d$.

1. Montrer que la suite $rg(f^n)$ admet une limite $r(f)$.
2. Si $g \in End(V)$ et commute avec $f$, montrer que $r(f+g) \leq r(f)+r(g)$. Montrer que cela est faux en général.
3. Exprimer $r(f)$ en fonction du polynôme caractéristique de $f$.

• Soit $(P_n)$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[t]$ de degrés $\leq d$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. La suite $P_n$ converge dans $V = \mathbb{R}_d[T]$ ;
2. la suite de fonctions $P_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ converge uniformément ;
3. la suite $P_n(x)$ converge pour tout $x \in [0,1]$.

• Soit $A$ une matrice carrée réelle de taille $n$. Montrer que l'on peut trouver une matrice réelle $B$ aussi proche de $A$ que l'on souhaite, de sorte que les valeurs propres complexes de $B$ soient simples.

• Soit $B$ une matrice carrée avec comme coefficients des 1 ou des $-1$. Combien de signes au minimum faut-il changer pour que la matrice devienne inversible ?

• Soient deux familles de nombres réels entrelacés : $\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < \cdots < \mu_n < \lambda_n < \mu_{n+1}$. Soit $A$ une matrice symétrique réelle telle que $\operatorname{Spec} A = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$\operatorname{Spec} \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & a \end{pmatrix} = (\mu_1, \dots, \mu_{n+1}) .$$

• Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. $P \in \mathbb{Q}[X]$ avec $\deg P = 1$,
2. $P$ induit une surjection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$.

• Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\forall x \; f''(x) \geq \lambda > 0$. Montrer que $f$ atteint son minimimum en un point unique. Montrer ensuite qu'il existe une constante $K$ telle que

$$\sup_{a,b\in\mathbb{R}} \left| \int_a^b e^{if(t)}\, dt \right| \leq \frac{K}{\sqrt{\lambda}} .$$

On pourra démarrer avec une fonction très simple ($f(t) = t^2$).

• Soit $Q \subset \mathbb{R}^n$ un cône positif (ensemble stable par multiplication par les scalaires strictement positifs) et $V : Q \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in Q \; \forall \lambda > 0 \; V(\lambda x) = V(x) + \alpha \log \lambda$. Montrer que l'intervalle maximal d'existence du problème de Cauchy suivant est borné à droite.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -\operatorname{grad} V(y) , \\ y(0) = y_0 \in Q . \end{cases}$$

Proposer une condition permettant d'aboutir à la même conclusion dans le cas d'une fonction $p-$homogène : $\forall x \in Q \; \forall \lambda > 0 \; V(\lambda x) = \lambda^p V(x)$.