Rapport de l'épreuve écrite de mathématiques D MP 2011
Écoles concernées : ENS de Paris
Coefficient 6
Membres du jury : François Charles, Antonin Guilloux, Fanny Kassel (correcteurs), Guy Henniart (concepteur et correcteur)

Le problème portait sur les endomorphismes nilpotents des espaces vectoriels complexes de dimension finie.

La deuxième partie n'était pas subordonnée à la première, on s'en rendait compte facilement. La première partie donnait l'occasion de tester les premières réactions des candidats, et surtout de poser quelques questions de géométrie élémentaire (6 à 9).

La deuxième partie avait pour but principal de paramétrer, par les partitions de l'entier n, les classes de similitudes de matrices nilpotentes dans $M_n(\mathbb{C})$, et de décrire la fermeture d'une telle classe en termes de partitions. La partie A traitait de la réduction d'un endomorphisme nilpotent – la détermination du commutant en A.6 n'est pas utile à la suite. La partie B regroupait les considérations topologiques indispensables au problème. La partie C ne contribuait pas au but final mais donnait le résultat intéressant que deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent engendrent une sous-algèbre de dimension au plus n – on aurait pu développer le problème dans cette direction. La partie D, purement combinatoire, introduisait l'ordre sur les partitions qui reflète la topologie des classes de similitudes nilpotentes, la fermeture d'une telle classe étant déterminée par la partie finale E.

Le problème ne comportait pas de difficulté précoce, et toutes les parties étaient abordables. D'ailleurs les candidats admissibles ont eu, à cette épreuve, des notes largement au-dessus de la moyenne.

Les correcteurs ont apprecié le sérieux de la majorité des candidats. Ils rappellent néanmoins qu'il faut être lisible et ne pas se contenter de style télégraphique : ce n'est pas au correcteur d'interpréter des signes incertains ou l'articulation possible entre une ligne et la suivante. Rappelons également que les raisonnements en géométrie peuvent être soutenus, et même partiellement justifiés, par des dessins : dessiner le cône dans la première partie aide grandement à résoudre la dernière question !

Un corrigé est donné dans la suite ; on rappelle cependant qu'il n'y a pas de corrigé type ; le style des candidats intervient, et plusieurs raisonnements peuvent amener la même réponse : par exemple un candidat prouve D.5. sans passer par D.4., ce qui est très bien !

Ce corrigé est suivi de commentaires particuliers sur certaines questions.

Corrigé

Question préliminaire

On a $u^k = 0$ pour un entier $k > 0$. Si α est un scalaire, $(\alpha u)^k = \alpha^k u^k$ est nul, donc αu est nilpotent. Le polynôme minimal de u divise X^k, il est donc de la forme X^r avec $0 \leq r \leq k$. Comme V n'est pas l'espace vectoriel nul, on a : $r > 0$; comme le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique, qui est de degré n, on a : $r \leq n$.

Première partie

1. Comme u n'est pas nul, il existe un vecteur x de V tel que $u(x) \neq 0$. D'après le préliminaire, on a : $u^2 = 0$; si $\alpha x + \beta u(x) = 0$ pour des scalaires α et β, on obtient $\alpha u(x) = 0$ en appliquant u, d'où $\alpha = 0$, puis $\beta = 0$; ainsi, $(x, u(x))$ est une base de V et on peut poser $x = e_2$, $u(x) = e_1$.

2. L'endomorphisme φ_A de $\mathbb{R}^2$ est nilpotent non nul ; par la question 1., il existe une base (e_1, e_2) telle que $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = e_1$; cela prouve que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

car ce sont les matrices de φ_A dans deux bases de $\mathbb{R}^2$.

3. Par la question 2., les matrices nilpotentes non nulles ont trace nulle et déterminant nul, ce qui est aussi le cas de la matrice nulle. Réciproquement, une matrice A de $\mathcal{M}$ dont la trace et le déterminant sont nuls a X^2 pour polynôme caractéristique, donc vérifie $A^2 = 0$.

4. Par la question 3., $\mathcal{S}$ contient $\mathcal{N}$. D'autre part, les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

engendrent $\mathcal{S}$ et elles sont nilpotentes d'après la question 3. Donc $\mathcal{N}$ engendre le sous-espace $\mathcal{S}$.

5. Puisque $\Phi(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{S}$ et que $\mathcal{N}$ engendre $\mathcal{S}$, on obtient par linéarité : $\Phi(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$. Mais Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}$ donc il induit un endomorphisme injectif de $\mathcal{S}$, qui est bijectif puisque $\mathcal{S}$ est de dimension finie.

6. L'application ι est clairement linéaire et injective, et une matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}$ a une trace nulle si et seulement si $d = -a$, de sorte que ι a pour image $\mathcal{S}$. C'est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathcal{S}$. Le cône nilpotent $\mathcal{N}$ est formé des matrices de $\mathcal{S}$ de déterminant nul (question 3), et le déterminant de $\iota(a, b, c)$ vaut $a^2 + bc$, donc $\mathcal{N}$ est bien l'image du cône de $\mathbb{R}^3$ d'équation $a^2 + bc = 0$.

7. Le cône $\mathcal{C}$ est donné par l'équation cartésienne $a^2 + bc = 0$. On a :

$$\frac{\partial}{\partial a}(a^2 + bc) = 2a,\ \frac{\partial}{\partial b}(a^2 + bc) = c,\ \frac{\partial}{\partial c}(a^2 + bc) = b.$$

Par suite, le point $P = (a, b, c)$ de $\mathcal{C}$ est régulier si $(2a, c, b) \neq (0, 0, 0)$, c'est-à-dire si P n'est pas nul. Alors le plan tangent Δ_P à $\mathcal{C}$ en P a pour équation

$$2a(x - a) + c(y - b) + b(z - c) = 0$$

ou encore

$$2ax + cy + bz = 0$$

puisque $a^2 + bc = 0$. Pour $Q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on calcule :

$$\iota(P)\iota(Q) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & * \\ * & ax + cy \end{pmatrix},$$

de sorte que Δ_P a bien pour équation $\mathrm{tr}(\iota(P)\iota(Q)) = 0$.

8. Soient $\alpha \neq 0$, $Q = (\alpha, 0, 0)$ et

$$A = \iota(Q) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Soit $P = (a, b, c)$ un point non nul de $\mathcal{C}$, alors Q appartient à Δ_P si et seulement si $a = 0$. Compte tenu de $a^2 + bc = 0$, les points P correspondants sont $(0, 0, c)$, $c \neq 0$ et $(0, b, 0)$, $b \neq 0$, ce qui mène aux plans d'équation $y = 0$ et $z = 0$, qui sont bien distincts. Les endomorphismes correspondant à de tels P sont ceux dont le noyau, égal à l'image, est une des deux droites propres de A.

Dans le cas général où A est diagonalisable, on a :

$$A = RA'R^{-1}, \quad \text{où } A' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix},$$

où R est une matrice inversible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et α est un scalaire non nul ; les droites propres de A sont engendrées par Re_1 et Re_2, où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Comme la trace est invariante par similitude, l'équation $\mathrm{tr}(\iota(P)\iota(Q)) = 0$ s'écrit aussi

$$\mathrm{tr}(\iota(P')A') = 0, \quad \text{où } P' \text{ est défini par } \iota(P') = R\,\iota(P)R^{-1}.$$

On a donc deux plans tangents à $\mathcal{C} - \{0\}$ passant par Q (où Q est défini par $\iota(Q) = A$) et les endomorphismes non nuls correspondant aux points de tangence sont ceux dont le noyau, égal à l'image, est l'une des droites propres de A.

9. Le polynôme caractéristique de

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

est $X^2 - (a^2 + bc)$. Si $a^2 + bc > 0$, ce polynôme a deux racines réelles distinctes et A est diagonalisable non nulle. Réciproquement, si A est diagonalisable non nulle, ses valeurs propres sont λ et $-\lambda$ pour un nombre réel non nul λ (les valeurs propres sont opposées car la trace est nulle, non nulles car la matrice n'est pas nulle) et son déterminant $-(a^2 + bc)$ vaut $-\lambda^2 < 0$.

Ainsi, $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ tels que $a^2+bc>0$. Comme l'application $(a,b,c)\mapsto a^2+bc$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ est continue, c'est une partie ouverte de $\mathbb{R}^3$.

Effectuant le changement de variables linéaire $a=\alpha$, $b=\beta+\gamma$, $c=\beta-\gamma$, on voit $\mathcal{C}$ comme le cône d'équation $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2=0$ et $\mathcal{D}$ comme la partie où $\alpha^2+\beta^2>\gamma^2$. Prouvons que $\mathcal{D}$ est connexe par arcs : si (α,β,γ) est un point de $\mathcal{D}$, on pose $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ et $\alpha=r\cos\theta$, $\beta=r\sin\theta$, θ dans $[0,2\pi[$, et on joint (α,β,γ) à $(r,0,\gamma)$ par le chemin $(r\cos t, r\sin t,\gamma)$, t entre θ et 0 ; on joint alors $(r,0,\gamma)$ à $(r,0,0)$ par le chemin $(r,0,\gamma t)$, t entre 1 et 0, puis $(r,0,0)$ à $(1,0,0)$ par le chemin $(t,0,0)$, t entre r et 1.

Le complémentaire $\mathcal{E}$ de $\mathcal{D}\cup\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^3$ est déterminé par l'inéquation $\alpha^2+\beta^2<\gamma^2$; il est ouvert pour la même raison que plus haut, et union de deux parties elles aussi ouvertes, la partie $\mathcal{E}^+$ où $\gamma>0$ et la partie $\mathcal{E}^-$ où $\gamma<0$. Si (α,β,γ) est un point de $\mathcal{E}^+$, on le joint à $(r,0,\gamma)$, $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ comme plus haut, puis à $(0,0,\gamma)$ et enfin à $(0,0,1)$: ainsi $\mathcal{E}^+$ est connexe par arcs. Comme $\mathcal{E}^-$ est l'image de $\mathcal{E}^+$ par l'application linéaire bijective $(\alpha,\beta,\gamma)\mapsto(\alpha,\beta,\gamma)$, $\mathcal{E}^-$ est également connexe par arcs.

Deuxième partie

A Réduction d'un endomorphisme nilpotent

A.1. Si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme v de V est X^n, on a d'après le théorème de Cayley-Hamilton : $v^n = 0$ et v est nilpotent. Réciproquement, si v est nilpotent, ses valeurs propres, qui sont racines du polynôme minimal de v, sont nulles, de sorte que le polynôme caractéristique de v est X^n.

A.2. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des scalaires non tous nuls tels que

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r = 0.$$

Soit j le plus petit entier strictement positif tel que $\alpha_j \neq 0$; on a alors :

$$0 = u^{r-j}(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r) = \alpha_j u^{r-1}(x),$$

d'où $\alpha_j = 0$. Cette contradiction entraîne que la famille $(e_1, \ldots, e_r)$ est libre.

On a : $u(e_j) = e_{j+1}$ pour tout entier j compris entre 1 et $r-1$, et $u(e_r) = 0$, donc W est stable par u et la matrice de u_W est constituée de 1 juste sous la diagonale et de 0 ailleurs : c'est

$$J_r = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A.3. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des scalaires non tous nuls tels que

$$\alpha_1 \varepsilon_1 + \cdots + \alpha_r \varepsilon_r = 0.$$

Soit j le plus petit entier strictement positif tel que $\alpha_j \neq 0$; on a alors :

$$0 = (\alpha_1 \varepsilon_1 + \cdots + \alpha_r \varepsilon_r)(u^{r-j}(x)) = \alpha_j \ell(e_r),$$

d'où $\alpha_j = 0$. Cette contradiction entraîne que la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ est libre et en particulier, on a : $\dim W' = n - r$.

Déterminons $W \cap W'$. Un vecteur quelconque non nul y de W s'écrit $y = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r$ pour des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ convenables non tous nuls ; si j est le plus petit entier tel que $\alpha_j \neq 0$, on a : $\varepsilon_{r-j}(y) = \alpha_j \ell(e_r) \neq 0$, donc y n'appartient pas à W' ; ainsi, l'intersection de W et W' est réduite à $\{0\}$. Comme W a pour dimension r, W et W' sont supplémentaires dans V. À présent, soit y dans W' ; on a : $\varepsilon_i(u(y)) = \varepsilon_{i+1}(y) = 0$ pour tout entier i compris entre 1 et $r-1$, et $\varepsilon_r(u(y)) = 0$ car $u^r = 0$; ainsi, W' est stable par u. Comme $u^r = 0$, on a aussi $u_{W'}^r = 0$ et $u_{W'}$ est nilpotent. En particulier, son polynôme minimal divise X^r ; il divise aussi X^{n-r} puisque $\dim W' = n - r$.

A.4. Comme indiqué, on effectue une récurrence sur n. L'initialisation est triviale si $n = 1$. Par les constructions précédentes, la matrice de u_W dans la base $(e_1, \ldots, e_r)$ est J_r. Si $r = n$, on a le résultat avec $\alpha = 1$ et $\lambda_1 = r$. Si $r < n$, on applique l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme nilpotent $u_{W'}$ de W', d'où l'existence d'entiers $\alpha \geq 2$ et $\lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_\alpha > 0$ tels que dans une base $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ de W', la matrice de $u_{W'}$ soit diagonale par blocs, de blocs $J_{\alpha_2}, \ldots, J_{\alpha_r}$. On a : $\lambda_2 \leq r$ car $u_{W'}^r = 0$. Ainsi, les entiers $\alpha, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ et la base $(e_1, \ldots, e_n)$ répondent à la question.

A.5. Pour $\varphi = \varphi_{J_k}$ et i entier naturel, on a : $\dim\ker\varphi^i = k$ si $i \geq k$ et $\dim\ker\varphi^i = i$ si $0 \leq i \leq k$. Comme la matrice de u est diagonale par blocs de blocs J_{λ_j}, on a, pour tout entier naturel i :

$$\dim\ker u^i = \sum_{j:\ i\geq\lambda_j} \lambda_j + \sum_{j:\ i<\lambda_j} i,$$

où j parcourt les entiers de 1 à α. Pour i strictement positif, on a donc :

$$\dim\ker u^{i-1} = \sum_{j:\ i>\lambda_j} \lambda_j + \sum_{j:\ i\leq\lambda_j} (i-1),$$

d'où :

$$(\diamondsuit) \qquad \dim\ker u^i - \dim\ker u^{i-1} = \sum_{j:\ i\leq\lambda_j} 1.$$

Soient $\alpha', \lambda'_1, \ldots, \lambda'_{\alpha'}$ d'autres entiers satisfaisant aux contraintes de la question A.4. On a : $\alpha = \dim\ker u = \alpha'$. Soit s le plus petit entier, s'il existe, tel que $\lambda'_s \neq \lambda_s$; on peut supposer que $\lambda'_s > \lambda_s$, alors

$$\#\{j :\ 1 \leq j \leq \alpha \text{ et } \lambda'_j \geq \lambda_s + 1\} \geq s, \quad \text{tandis que} \quad \#\{j :\ 1 \leq j \leq \alpha \text{ et } \lambda_j \geq \lambda_s + 1\} < s,$$

ce qui contredit la relation $(\diamondsuit)$. Il n'existe donc pas de tel entier s et on a unicité de $\alpha, \lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$.

A.6. Il est immédiat que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$. Notons

$$e_1^{(1)}, \ldots, e_1^{(\lambda_1)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_2^{(\lambda_2)}, \ldots, e_\alpha^{(1)}, \ldots, e_\alpha^{(\lambda_\alpha)}$$

les vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ de la question A.4. pris dans le même ordre. L'endomorphisme v de $\mathcal{C}(u)$ est déterminé par ses valeurs sur cette base. La condition $uv = vu$ s'exprime par

$$\begin{cases} v(e_j^{(i+1)}) = u(v(e_j^{(i)})) & \text{si } 1 \leq j \leq \alpha,\ 1 \leq i < \lambda_j, \\ 0 = v(0) = uv(e_j^{(\lambda_j)}) & \text{si } 1 \leq j \leq \alpha, \end{cases}$$

ce qui entraîne que $v(e_j^{(1)})$ appartient à $\ker u^{\lambda_j}$; inversement, si on se donne $v(e_j^{(1)})$ dans $\ker u^{\lambda_j}$ pour tout j de $\{1, \ldots, \alpha\}$, les formules précédentes définissent un unique endomorphisme v de V qui commute à u. On a donc :

$$\dim\mathcal{C}(u) = \sum_{j=1}^{\alpha} \dim\ker u^{\lambda_j}.$$

D'après la question A.5., on a, puisque les λ_i décroissent :

$$\dim\ker u^{\lambda_j} = j\lambda_j + \lambda_{j+1} + \cdots + \lambda_\alpha$$

pour $j = 1, \ldots, \alpha$, d'où finalement :

$$\dim\mathcal{C}(u) = \sum_{j=1}^{\alpha} \lambda_j(j + (j-1)) = \sum_{j=1}^{\alpha} \lambda_j(2j-1).$$

B Outils topologiques

B.1. Soient f, g deux applications continues de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. Fixons une norme $||.||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et le module ordinaire sur $\mathbb{C}$. Pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ε réel strictement positif, il existe un réel strictement positif η tel que pour toute matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'inégalité $||B - A|| \leq \eta$ implique $|f(B) - f(A)| \leq \varepsilon$ et $|g(B) - g(A)| \leq \varepsilon$; on a alors : $|(f+g)(B) - (f+g)(A)| \leq 2\varepsilon$ et

$$(fg)(B) - (fg)(A) = (f(B) - f(A))g(B) + f(A)(g(B) - g(A)),$$

dont le module est majoré par $\varepsilon(|g(A)| + \varepsilon) + |f(A)|\varepsilon$; ainsi, $f + g$ et fg sont bien continues.

À présent, fixons B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La formule de multiplication de deux matrices indique que les coefficients des matrices AB et BA sont des formes linéaires en les coefficients de A. Ce sont donc des applications continues de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. Comme ce sont les coordonnées de AB et BA dans une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les applications $A \mapsto AB$ et $A \mapsto BA$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même sont continues. On peut aussi utiliser le fait bien connu que les applications $A \mapsto AB$ et $A \mapsto BA$ sont des endomorphismes linéaires d'un espace de dimension finie.

B.2. La formule donnant le déterminant de la matrice $XI_n - A$ implique que l'application qui à A associe un coefficient donné de son polynôme caractéristique s'obtient en prenant des combinaisons linéaires de produits des applications coefficients $A = (a_{ij}) \mapsto a_{ij}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$; comme ces applications coefficients sont continues, le résultat découle de B.1.

B.3. Par la question A.1., $\mathcal{N}$ est l'image réciproque de la partie fermée $\{X^n\}$ de $\mathbb{C}[X]_{\leq n}$ par l'application « polynôme caractéristique », qui est continue par B.2. : ainsi, $\mathcal{N}$ est fermé.

B.4. Une matrice A de $\mathcal{M}_{a,b}(\mathbb{C})$ est de rang $\geq r$ si et seulement si l'un de ses mineurs de rang r est non nul. L'application de $\mathcal{M}_{a,b}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ qui à A associe un mineur donné de rang r est continue : c'est un cas particulier de B.2., vu que l'extraction d'une sous-matrice de taille $r \times r$ est clairement continue. Ainsi, la partie de $\mathcal{M}_{a,b}(\mathbb{C})$ formée des matrices de rang $\geq r$ est une réunion finie de parties ouvertes donc elle est ouverte.

B.5. La partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée des matrices de rang supérieur ou égal à $\operatorname{rg} A$ est ouverte donc, pour i assez grand, on a : $\operatorname{rg} A_i \geq \operatorname{rg} A$ et, par le théorème du rang : $\dim\ker A_i \leq \dim\ker A$.

C Deux endomorphismes qui commutent

C.1. Soient P_1, P_2 dans $\mathbb{C}[X]$. Si $P_1(v)(x) = 0 = P_2(v)(x)$, on a : $(P_1+P_2)(v)(x) = P_1(v)(x) + P_2(v)(x) = 0$; si $P_1(v)(x) = 0$, on a : $(P_2P_1)(v)(x) = P_2(v)(P_1(v)(x)) = P_2(v)(0) = 0$; ainsi, I_x est bien un idéal de $\mathbb{C}[X]$. Il n'est pas nul car il contient le polynôme minimal de v ; son unique générateur unitaire μ_x divise donc ce polynôme minimal et le degré de μ_x est au plus n.

(ii)⇒(i) : Si les vecteurs $(x, \dots, v^{n-1}(x))$ sont linéairement indépendants, on a : $P(v)(x) \neq 0$ pour tout polynôme P non nul de degré strictement inférieur à n donc μ_x est de degré supérieur ou égal à n, donc égal à n.

(i)⇒(ii) : Par contraposée : si les vecteurs $(x, \dots, v^{n-1}(x))$ sont liés, une relation de dépendance linéaire donne un polynôme non nul P de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $P(v)(x) = 0$, ce qui entraîne que le degré de μ_x est strictement inférieur à n.

Soit v un endomorphisme régulier et nilpotent de V. Si x est un vecteur de V vérifiant la condition (i), le système $(x, v(x), \dots, v^{n-1}(x))$ est libre de cardinal n ; c'est donc une base de V et la matrice de v dans cette base est J_n puisque $v^n(x) = 0$.

Inversement, si la matrice d'un endomorphisme v de V est J_n dans une base $(e_1, \dots, e_n)$, alors le vecteur $x = e_1$ vérifie la condition (ii), et v est régulier (et nilpotent).

C.2. Soit u un endomorphisme de V qui commute à v. Comme $(x, v(x), \dots, v^{n-1}(x))$ est une base de V, on peut écrire : $u(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 v(x) + \cdots + \alpha_{n-1} v^{n-1}(x)$ pour des scalaires $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ convenables. Considérons le polynôme $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$; on a : $P(v)(x) = u(x)$ et, pour k entier naturel :

$$P(v)(v^k(x)) = v^k(P(v)(x)) = v^k(u(x)) = uv^k(x) = u(v^k(x)),$$

d'où $P(v) = u$.

Réciproquement, il est clair que tous les polynômes en v commutent à v.

C.3. Pour un scalaire quelconque ε, notons $\Delta(\varepsilon)$ le déterminant, dans la base $\mathcal{B}$, de la famille $(x, (v+\varepsilon w)(x), \dots, (v+\varepsilon w)^{n-1}(x))$. Par multilinéarité du déterminant, $\Delta(\varepsilon)$ est un polynôme en ε ; il est de degré $d = n(n-1)/2$ et de coefficient dominant 1. Si ε n'est pas une racine de ce polynôme, ce qui exclut au plus d valeurs, on a $\Delta(\varepsilon) \neq 0$, si bien que $(x, (v+\varepsilon w)(x), \dots, (v+\varepsilon w)^{n-1}(x))$ est une base de V : ainsi, l'endomorphisme $v + \varepsilon w$ est régulier.

C.4. Notons x le vecteur $e_1 + e_{\lambda_1+1} + e_{\lambda_1+\lambda_2+1} + \ldots + e_{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{r-1}+1}$. Prouvons que μ_x est de degré n.

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. La matrice de $P(v+w)$ dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, de blocs successifs $P(c_i I_{\lambda_i} + J_{\lambda_i})$ pour i compris entre 1 et α. Ainsi $P(v+w)$ annule x si et seulement si $P(c_i I_{\lambda_i} + J_{\lambda_i})$ annule le vecteur $e_1 + e_{\lambda_1+1} + \ldots + e_{\lambda_1+\ldots+\lambda_{i-1}+1}$, pour i entre 1 et α. Par la question C.1., cela signifie que P est multiple de $(X - c_i)^{\lambda_i}$ pour chaque i compris entre 1 et α. Comme les c_i sont supposés distincts deux à deux, cela entraîne que P est multiple du produit $\prod_{i=1}^{\alpha} (X - c_i)^{\lambda_i}$. Si P n'est pas nul, il est donc de degré $\geq n$ et μ_x est bien de degré n.

C.5. Comme u est nilpotent, on peut grâce à la question A.4. prendre $v = u$ dans la question C.4. Alors l'endomorphisme w qui y est défini commute à u, ainsi que $u + w$ qui est régulier.

C.6. Supposons d'abord que v est régulier. D'après C.2., u est un polynôme en v et le polynôme minimal de v est de degré n, de sorte que l'espace A est de dimension égale à n.

Dans le cas général, soit w un endomorphisme régulier qui commute à u : son existence est assurée par C.5. D'après C.3., l'endomorphisme $v + \varepsilon w$ est régulier pour tout ε non nul assez petit et il commute à u, de sorte que le sous-espace A_ε attaché à u et $v + \varepsilon w$ est de dimension au plus n. Supposons A de dimension strictement supérieure à n. Il existe alors une famille finie de $n+1$ éléments distincts de couples d'entiers positifs $(i_s, j_s)_{s=1,\dots,n+1}$ tels que les endomorphismes $u^{i_s} v^{j_s}$ soient linéairement indépendants.

Posons $a = n^2$ et $b = n+1$ et fixons une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}(V)$. Pour un scalaire ε quelconque, notons $M(\varepsilon)$ la matrice de $\mathcal{M}_{a,b}(\mathbb{C})$ dont la s^{e} colonne est la colonne des coordonnées de $u^{i_s}(v+\varepsilon w)^{j_s}$ dans la base $\mathcal{B}$. Il existe des endomorphismes de V notés $t_1, \dots, t_{j_s}$ tels que

$$u^{i_s}(v+\varepsilon w)^{j_s} = u^{i_s} v^{j_s} + \varepsilon t_1 + \cdots + \varepsilon^{j_s} t_{j_s},$$

si bien que les coefficients de $M(\varepsilon)$ sont des polynômes en ε, d'où leur continuité.

Pour $\varepsilon = 0$, la matrice $M(0)$ est de rang $n+1$. Quand ε tend vers 0, $u^{i_s}(v+\varepsilon w)^{j_s}$ tend vers $u^{i_s} v^{j_s}$ et $M(\varepsilon)$ tend vers $M(0)$. Par B.3., la matrice $M(\varepsilon)$ est donc de rang au moins $n+1$ pour ε non nul assez petit, ce qui contredit le résultat prouvé dans le cas régulier.

C.7. Si u et v sont nilpotents et commutent entre eux, alors $(u^i v^j)^n = u^{in} v^{jn} = 0$ si les entiers i et j ne sont pas tous deux nuls, de sorte que $u^i v^j$ est nilpotent et B, qui est engendré par ces endomorphismes qui commutent entre eux, est formé d'éléments de trace nulle. Comme le sous-espace A de la question C.6. contient l'application identité de V, la forme linéaire tr_A

induite par la trace sur A n'est pas nulle, si bien que B, contenu dans le noyau de cette forme linéaire tr_A, est de dimension strictement inférieure à celle de A. Comme $\dim A \leq n$, on a bien : $\dim B \leq n-1$.

C.8. Prenons

$$\begin{array}{llll} u: & e_2 \mapsto e_1 \mapsto 0, & e_4 \mapsto e_3 \mapsto 0, & u^2 = 0; \\ v: & e_3 \mapsto e_1 \mapsto 0, & e_4 \mapsto e_2 \mapsto 0, & v^2 = 0. \end{array}$$

On vérifie que $uv = vu : e_4 \mapsto e_1 \mapsto 0$, $e_2 \mapsto 0$, $e_3 \mapsto 0$, de sorte que B est formé des endomorphismes w ayant pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ parcourant } \mathbb{C}.$$

On calcule $w^2 : e_4 \mapsto \alpha\beta e_1$, $e_1 \mapsto 0$, $e_2 \mapsto 0$, $e_3 \mapsto 0$, d'où $w^3 = 0$. Ainsi, B ne contient aucun endomorphisme régulier.

D Partitions

D.1. Il y a au moins autant d'entiers j tels que $\lambda_j \geq i$ que d'entiers j tels que $\lambda_j \geq i+1$ donc la suite (μ_i) est décroissante. On a $\mu_i = 0$ si $i > \lambda_0$ et, de plus :

$$|\mu| = \sum_{i=1}^{\lambda_0} \mu_i = \sum_i \#\{j :\ \lambda_j \geq i\} = \sum_{(i,j):\ \lambda_j \geq i} 1 = \sum_j \#\{i :\ \lambda_j \geq i\} = \sum_{j \geq 1} \lambda_j = |\lambda|.$$

D.2. On passe du diagramme $D(\lambda)$ de λ à celui $D(\lambda')$ de λ' par la symétrie par rapport à la première diagonale $\sigma : (x, y) \mapsto (y, x)$. En effet, λ'_i est le nombre d'entiers j strictement positifs tels que $\lambda_j \geq i$, donc (i, j) appartient à $D(\lambda')$ si et seulement si $j \geq 1$ et $1 \leq i \leq \lambda_j$. On reconnaît là une condition nécessaire et suffisante pour que (j, i) appartienne à $D(\lambda)$.

Comme la symétrie σ est involutive, on en déduit que $(\lambda')' = \lambda$ car le diagramme de λ, par sa définition, détermine la partition λ.

D.3. Si $\mu = \lambda$, on a bien $\mu \leq \lambda$. D'autre part, si $\mu \leq \lambda$ et $\lambda \leq \mu$, on a $\mu_1 + \cdots + \mu_i = \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$ pour tout entier $i \geq 1$, ce qui entraîne par récurrence $\mu_i = \lambda_i$ pour tout $i \geq 1$. Enfin, si $\nu \leq \mu \leq \lambda$, on a : $|\nu| = |\mu| = |\lambda|$ et $\nu_1 + \cdots + \nu_i \leq \mu_1 + \cdots + \mu_i \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$ pour tout $i \geq 1$, ce qui prouve la transitivité.

Dans les partitions de l'entier $n = 6$, prenons $\mu = (4, 1, 1, 0, \dots)$ et $\lambda = (3, 3, 0, \dots)$. On a : $4 > 3$ et $3 + 3 < 4 + 1$, ce qui prouve respectivement que les assertions $\mu \leq \lambda$ et $\lambda \leq \mu$ sont fausses.

D.4. Soit i_0 le plus petit entier tel que $\mu_i \neq \lambda_i$. On a donc $\mu_i = \lambda_i$ pour $i < i_0$ et $\mu_1 + \cdots + \mu_{i_0} \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_{i_0}$, si bien que $\mu_{i_0} < \lambda_{i_0}$. Posons $\nu_i = \mu_i = \lambda_i$ pour $i < i_0$ et $\nu_{i_0} = \mu_{i_0} + 1$, de sorte que $\mu_1 + \cdots + \mu_{i_0} < \nu_1 + \cdots + \nu_{i_0} \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_{i_0}$.

Remarquons que $\mu_{i_0+1} \geq 1$, car sinon $\mu_1 + \cdots + \mu_{i_0} = |\mu| = |\lambda| \geq \lambda_1 + \cdots + \lambda_{i_0}$. Il existe donc $i > i_0$ tel que $\mu_{i+1} < \mu_i$, et soit i_1 le plus petit tel entier i. On pose alors $\nu_i = \mu_i$ pour $i > i_0$ et $i \neq i_1$ et on pose $\nu_{i_1} = \mu_{i_1} - 1 \geq \mu_{i_1+1}$. On a ainsi défini une partition ν de $n = |\mu|$ et on a : $\nu_1 + \cdots + \nu_i = \mu_1 + \cdots + \mu_i$ si $i < i_0$ ou $i \geq i_1$, et $\nu_1 + \cdots + \nu_i = \mu_1 + \cdots + \mu_i + 1$ si $i_0 \leq i < i_1$, de sorte que $\mu \leq \nu$.

Prouvons que $\nu \leq \lambda$. On a assurément $\nu_1 + \cdots + \nu_i = \mu_1 + \cdots + \mu_i \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$ si $i < i_0$ ou $i \geq i_1$, mais aussi si $i = i_0$ par choix de i_1. Il suffit de démontrer que $\mu_1 + \cdots + \mu_i < \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$

si $i_0 < i < i_1$, sachant que l'inégalité large est vraie. Supposons au contraire avoir égalité pour un tel i ; comme on a $\mu_1 + \cdots + \mu_{i_0} < \lambda_1 + \cdots + \lambda_{i_0}$ et $\mu_i = \mu_{i_0+1}$, il vient $\lambda_i < \mu_i$ (car λ est décroissante) ; mais alors, $\lambda_{i+1} < \mu_i = \mu_{i+1}$, si bien que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i+1} < \mu_1 + \cdots + \mu_{i+1}$, ce qui contredit l'hypothèse $\mu \leq \lambda$.

D.5. Par D.2., il suffit de prouver que si $\mu \leq \lambda$, alors $\lambda' \leq \mu'$. C'est évident si $\mu = \lambda$. Supposons que $\mu < \lambda$ et utilisons le résultat et les notations de D.4..

Supposons d'abord que $\lambda = \nu$; alors, on a : $\lambda'_i = \mu'_i$ pour i différent de μ_{i_1} et μ_{i_0} ; de plus, on a : $\lambda'_{\mu_{i_1}} = \mu'_{\mu_{i_1}} - 1$ et $\lambda'_{\mu_{i_0}} = \mu'_{\mu_{i_0}} + 1$. On vérifie sans peine que $\lambda' < \mu'$.

Revenons au cas général. Supposons construite une suite finie $\mu = \nu_0$, $\nu = \nu_1, , \nu_2, \ldots, \nu_r \leq \lambda$ telle que chaque ν_i soit, pour $i \geq 1$, obtenu à partir de ν_{i-1} par le procédé de D.4. Avec le raisonnement du cas particulier ci-dessus, on obtient : $\nu'_r < \nu'_{r-1} < \cdots < \nu'_1 < \mu$. Si $\lambda = \nu_r$, on a donc bien $\lambda' < \mu'$. Sinon, on applique à nouveau D.4. à ν_r et λ pour construire ν_{r+1}. Le procédé s'arrête car le nombre de partitions de n est fini.

E Topologie des classes de similitude

E.1. Par la question A.4., une matrice de $\mathcal{N}$ est semblable à l'une des matrices J_λ, où λ est une partition de n ; par la question A.5., cette partition est unique. Donc les $\mathcal{N}_\lambda$ sont deux à deux disjoints et $\mathcal{N}$ est l'union des $\mathcal{N}_\lambda$.

Soit $\overline{\mathcal{N}_\lambda}$ l'adhérence de $\mathcal{N}_\lambda$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Puisque d'après B.2., $\mathcal{N}$ est fermé, on a : $\overline{\mathcal{N}_\lambda} \subset \mathcal{N}$.

Il s'agit de montrer que si une matrice A appartient à $\overline{\mathcal{N}_\lambda}$, alors toute la classe de similitude $\mathcal{N}_\mu$ de A est incluse dans $\overline{\mathcal{N}_\lambda}$. Soit B une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Fixons une suite de matrices $(A_i)_{i \geq 1}$ de $\mathcal{N}_\lambda$ qui converge vers A dans $\overline{\mathcal{N}_\lambda}$. Alors, grâce à la continuité de $A \mapsto BAB^{-1}$, qui résulte de la question B.1., la suite (BA_iB^{-1}) converge vers BAB^{-1}. Mais pour tout entier i, BA_iB^{-1} appartient à $\mathcal{N}_\lambda$, donc BAB^{-1} appartient à $\overline{\mathcal{N}_\lambda}$. Puisque B était arbitraire, $\mathcal{N}_\mu$ est inclus dans $\overline{\mathcal{N}_\lambda}$.

E.2. Pour la matrice J_i et $D = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_i)$, on a (les coefficients non indiqués sont nuls) :

$$DJ_iD^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \delta_2/\delta_1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \delta_i/\delta_{i-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour J_λ, c'est le même calcul, bloc par bloc.

Prenant ε scalaire non nul et $D_\varepsilon = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1})$, on trouve que $D_\varepsilon J_\lambda {D_\varepsilon}^{-1}$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0, ce qui prouve que l'adhérence de $\mathcal{N}_\lambda$ contient la matrice nulle.

Partant de J_n et prenant ε scalaire non nul et $D_\varepsilon = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^\alpha, \ldots, \varepsilon^\alpha)$, où ε^i est répété λ_i fois pour tout entier i, on obtient que $D_\varepsilon J_n D_\varepsilon^{-1}$ tend vers J_λ lorsque ε tend vers 0. Par suite, l'adhérence de $\mathcal{N}^{\mathrm{reg}}$ contient J_λ, donc elle contient $\mathcal{N}_\lambda$ entier.

Enfin, $\mathcal{N}^{\mathrm{reg}}$ est ouvert dans $\mathcal{N}$ car c'est l'ensemble des matrices A de $\mathcal{N}$ telles que $A^{n-1} \neq 0$: en effet, pour toute partition λ, J_λ est annulé par le polynôme X^{λ_1}. On peut aussi dire que $\mathcal{N}^{\mathrm{reg}}$ est l'intersection de $\mathcal{N}$ avec la partie ouverte des matrices de rang supérieur ou égal à $n-1$: en effet, la dimension du noyau de J_λ est le nombre de parts λ'_1 de la partition λ.

E.3. Si l'adhérence de $\mathcal{N}_\lambda$ contient $\mathcal{N}_\mu$, il existe une suite (A_i) d'éléments de $\mathcal{N}_\lambda$ qui converge vers J_μ. Alors, pour tout entier strictement positif k, la suite (A_i^k) converge vers J_μ^k ce qui prouve, d'après B.5., que pour tout entier i assez grand, on a : $\dim\ker A_i^k \leq \dim\ker J_\mu^k$. Mais si λ' et μ' sont les partitions conjuguées de λ et μ, cela donne d'après A.5. : $\lambda'_1 + \cdots + \lambda'_k \leq \mu'_1 + \cdots + \mu'_k$

pour tout entier strictement positif k, ce qui exprime que $\lambda' \leq \mu'$ et permet de conclure, avec D.5., que $\mu \leq \lambda$.

E.4. On forme les images successives par u :

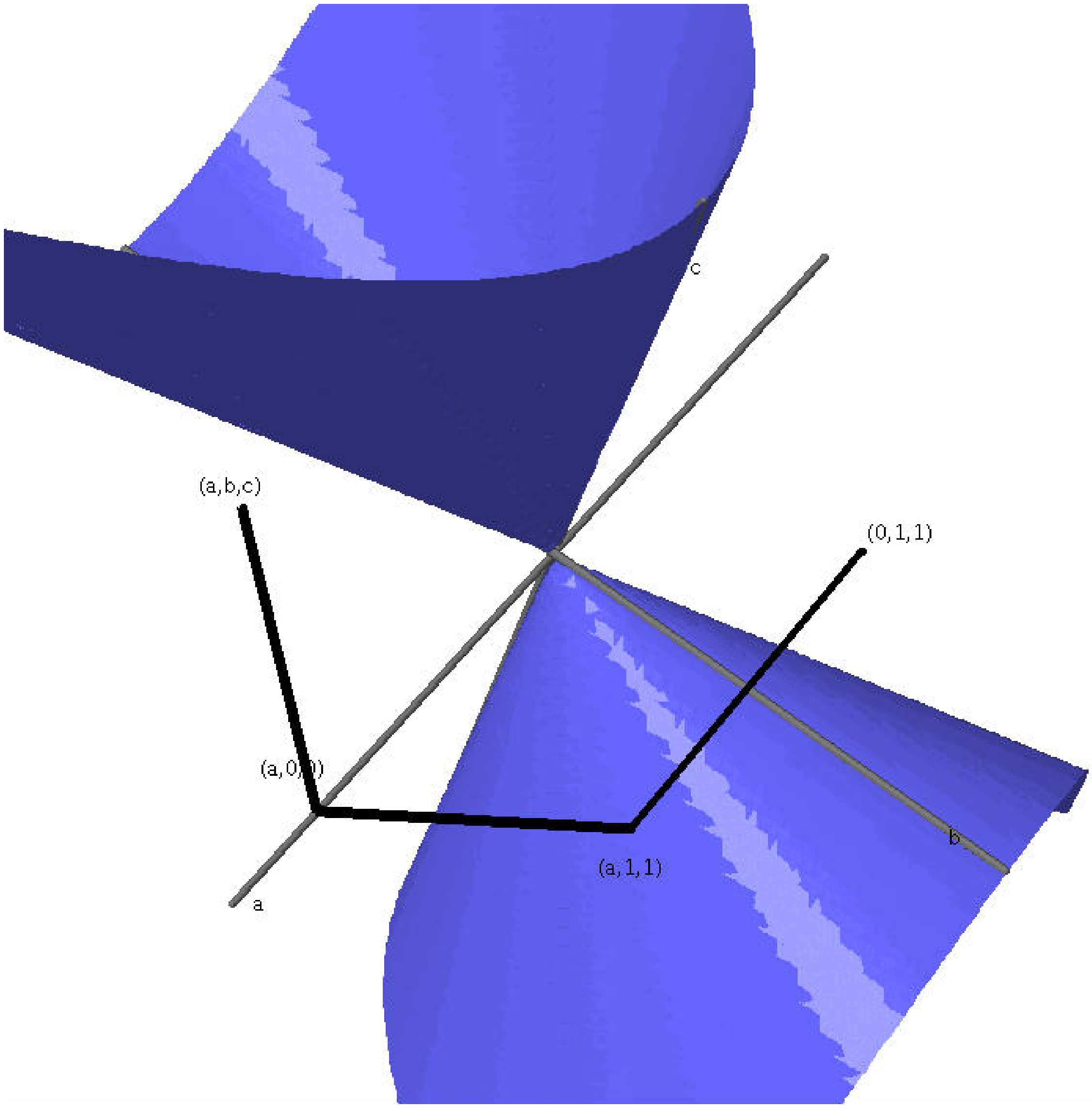
$$\begin{aligned}&e_2 + f_1 \mapsto e_3 + f_2 \mapsto \cdots \mapsto e_m + f_{m-1} \mapsto e_{m+1} \mapsto 0,\\ &\varepsilon e_1 \mapsto \varepsilon e_2 \mapsto \cdots \mapsto \varepsilon e_{m+1} \mapsto 0.\end{aligned}$$

La famille $(e_2 + f_1, e_3 + f_2, \cdots, e_m + f_{m-1}, e_{m+1}, \varepsilon e_1, \varepsilon e_2, \cdots, \varepsilon e_m)$ est une base de V car $\varepsilon \neq 0$. Dans cette base, l'endomorphisme u a pour matrice la matrice

$$A(\varepsilon) = \left(\begin{array}{c|cc} & & 0 \\ J_m & (0) & 0 \\ & & \varepsilon \\ \hline & & \\ (0) & J_m & \\ & & \end{array}\right),$$

donc la matrice $A(\varepsilon)$ appartient à $\mathcal{N}_\lambda$ lorsque $\varepsilon \neq 0$. Mais lorsque ε tend vers 0, $A(\varepsilon)$ tend vers J_μ, ce qui prouve que J_μ appartient à $\overline{\mathcal{N}_\lambda}$. D'après E.1., il en résulte que $\mathcal{N}_\mu$ est inclus dans $\overline{\mathcal{N}_\lambda}$.

E.5. En utilisant le même raisonnement qu'en D.5., on voit qu'il suffit de traiter le cas où, avec les notations de D.4., on a $\lambda = \nu$. Pour cela, on effectue l'opération de E.3. sur les blocs de rangs i_0 et i_1, ce qui prouve que $\overline{\mathcal{N}_\lambda}$ contient $\mathcal{N}_\mu$.



c
(a,b,c)
(0,1,1)
(a,0,0)
(a,1,1)
b
a

Commentaires

Question préliminaire

Dans cette question, le corps k peut être $\mathbb{R}$. En ce cas, connaître les valeurs propres de u ne suffit pas à déterminer le polynôme caractéristique de u, ce sont seulement les racines réelles de ce polynôme. Pour voir que r vaut au plus n, on peut raisonner comme en A.2.

Première partie

3. Ne pas oublier la matrice nulle !

4. Il ne suffit pas de donner la (bonne) réponse, il faut encore la justifier.

7. Certains candidats écrivent directement, pour l'équation du plan tangent, $2ax+cy+bz=0$ plutôt que $2a(x-a)+c(y-b)+b(z-c)=0$: certes le terme constant est nul, mais ce n'est pas absolument immédiat.

8. L'indication invitait à traiter d'abord le cas diagonal, où les calculs sont simples ; encore fallait-il traiter tous les points. Le cas général est plus difficile par le calcul, mieux valait se ramener au cas diagonal par conjugaison ; il fallait quand même détailler cette réduction.

9. Les correcteurs ont vivement apprécié les copies qui offraient un dessin. Le changement de variables du corrigé présente le cône avec une équation habituelle, et les trois parties à trouver sont l'extérieur du cône et les deux composantes connexes de l'intérieur : c'est visible sur le dessin et n'est plus alors très difficile à justifier. Bien sûr, il n'est pas nécessaire d'effectuer le changement de variable pour résoudre cette question, mais il faut quand même décrire les chemins permettant d'obtenir la connexité par arcs.

Deuxième partie

A.1. Ne pas oublier la moitié de la question ! De manière générale, ne pas lire l'énoncé trop vite.

A.3. Cette question, bien guidée, n'est pas toujours bien traitée. En particulier, il n'y a aucune raison que $\varepsilon_i(e_j)=\delta_{ij}$.

On peut remarquer que $\varepsilon_i = ({}^t u)^{i-1}(l)$ pour $1 \leq i \leq r$ et que $({}^t u)^r = 0$; de plus $\varepsilon_r(x) \neq 0$ de sorte que $\varepsilon_r \neq 0$. Que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ soit libre découle alors de A.1. appliquée à l'élément l du dual V^* de V et à l'endomorphisme nilpotent ${}^t u$ de V^*. D'autre part, même sans savoir que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ est libre, on sait que W' est de dimension au moins $n-r$, comme intersection des noyaux de r formes linéaires sur V. Prouver que $W \cap W' = \{0\}$ entraîne alors que W' est de dimension $n-r$ et que $V = W \oplus W'$.

La dernière ligne de A.3. formulait une question ouverte. Certaines réponses étaient justes, mais inintéressantes. Le point principal est que ce polynôme minimal divise X^r : cela sert dans la question A.4.. On sait aussi qu'il divise X^{n-r}. On ne peut guère dire plus : si $r=n$, W' est nul et le polynôme minimal est bien 1 ; si $r<n$, on peut donner des exemples où le polynôme minimal de $u_{W'}$ est n'importe quel entier de 1 à $\min(r, n-r)$.

A.4. L'assertion à démontrer en fonction de n est que pour tout espace vectoriel complexe V de dimension n et pour tout endomorphisme nilpotent u de V, il existe α et λ vérifiant les conditions requises : certains candidats n'ont pas bien compris ce qu'il fallait prouver. Certains, curieusement, laissent entendre qu'il y a plus d'un bloc dans W. Utiliser la question A.3. évite de réordonner pour obtenir les λ_i décroissants. Noter aussi qu'il ne suffit pas d'initialiser la récurrence à $n = 2$.

A.5. Un certain nombre de candidats oublient de démontrer que α et les entiers λ_i sont déterminés par u, ou affirment que c'est vrai sans justification, ce qui ne suffit pas au correcteur.

A.6. Peu de bonnes réponses, malgré l'indication. Certains calculs sans suite aboutissent mystérieusement à la bonne formule donnée dans l'énoncé !

B.1. Cette question, de nature très élémentaire, a dérouté certains candidats. Mais des écritures comme $x_{ij} \circ (f+g) = x_{ij} \circ f + x_{ij} \circ g$ prouvent que la question n'a pas été lue correctement. Pour la première partie, on peut raisonner comme dans le corrigé, mais on peut aussi dire simplement que l'application (f, g) de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^2$ est continue par définition de la topologie de $\mathbb{C}^2$. Comme les applications somme et produit de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$ sont continues, on obtient le résultat puisque la composée de deux applications continues est continue.

B.3. Certains disent qu'une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est nilpotente exactement quand son polynôme caractéristique vaut $X, X^2, \ldots$ ou X^n : cela sous-entend une confusion entre polynôme caractéristique et polynôme minimal. Comme $\mathcal{N}$ est l'ensemble des matrices A telles que $A^n = 0$, on peut aussi utiliser la continuité de l'application $A \mapsto A^n$ de $M_n(\mathbb{C})$ dans lui-même.

B.4. Attention, pour montrer que le noyau d'une application linéaire est de dimension au plus k dans un espace de dimension n, il ne suffit pas de prouver qu'il existe $n - k$ vecteurs linéairement indépendants qui ne sont pas dans le noyau !

B.5. Beaucoup de candidats compliquent leur rédaction par un raisonnement par l'absurde inutile.

C.1. Il est incorrect de dire $PQ(v)(x) = P(v)(x).Q(v)(x)$ ou $P(Q(v))(x)$! Affirmer que $PQ(v)(x) = 0$ pour tout polynôme P et pour tout polynôme Q dans I_x ne suffit pas, il faut donner une explication.

La fin de la question a été correctement interprétée par les candidats. Il s'agit bien de prouver qu'il existe un vecteur x de V satisfaisant à (i) et (ii) exactement quand v a, dans une base adéquate de V, la matrice J_n.

La définition de *régulier* n'implique pas que v soit nilpotent.

C.2. Si v est nilpotent, on peut utiliser la question A.6., même si on ne l'a pas traitée. Mais pas si v est régulier non nilpotent !

C.3. Il faut prendre garde dans les calculs : v et w ne commutent pas forcément.

C.4. A priori, il ne suffit pas de prouver que le polynôme minimal de $v + w$ est de degré n. Il est vrai que si un endomorphisme u de V a pour polynôme minimal μ, il existe un vecteur x de V tel que $\mu_x = \mu$, mais cela demande bien des arguments supplémentaires.

C.8. Donner un exemple correct, c'est bien, mais c'est mieux de justifier que c'est bien un exemple.

D.2. Trouver la transformation géométrique était assez facile, même si certains l'identifient comme la symétrie par rapport à l'axe vertical suivie d'une rotation d'un quart de tour. Mais il fallait également justifier que cette transformation était la bonne. Pour prouver l'involutivité de $\lambda \mapsto \lambda'$, il est important de remarquer que le diagramme d'une partition détermine cette partition.

D.3. Pour justifier que les partitions $(4, 1, 1, \ldots)$ et $(3, 3, \ldots)$ de 6 ne sont pas comparables, on peut écrire $4 > 3$ et $4 + 1 < 3 + 3$, mais les inégalités larges ne suffisent pas.

D.4. La plupart des candidats choisissent correctement l'indice i_0 mais pas l'indice i_1 ; beaucoup se contentent de prouver que $\mu \geq \nu \geq \lambda$ mais ne prouvent pas que ν est une partition : souvent ce qu'ils proposent n'en est pas une !

D.5. Cette question est assez simple en utilisant D.4., mais un candidat a réussi à prouver l'équivalence directement.

E.1. Dire que l'adhérence de $\mathcal{N}_\lambda$ est incluse dans $\mathcal{N}$ ne suffit pas à conclure que c'est une réunion de parties $\mathcal{N}_\mu$.

La fin de la partie E a été très peu abordée.