Rapport sur l'oral de mathématiques 2012

Oral spécifique E.N.S. Paris : Jean-François Coulombel.
Oral commun Paris-Lyon-Cachan : Vincent Calvez, Bertrand Deroin, Charles Favre.

1 Remarques générales

Le jury a noté le très bon niveau général des candidats, certains d'entre eux ayant même déjà acquis un recul et une maîtrise tout-à-fait remarquables. Le jury a également apprécié le dynamisme, voire l'enthousiasme de certains candidats dans le contexte délicat des épreuves orales. Nombreux sont les candidats qui ont effectué un gros travail de préparation spécifique à ces épreuves, notamment via les colles de mathématiques tout au long de l'année (gestion du tableau, explication claire des méthodes employées etc.). Le jury regrette toutefois qu'une partie encore importante des candidats tombe dans des travers régulièrement pointés dans les précédents rapports. Le jury ne peut donc qu'encourager les professeurs de classes préparatoires à assurer la diffusion la plus large possible de ces rapports auprès de leurs élèves, en espérant que cela les aide à donner la pleine mesure de leurs moyens le jour des épreuves.

2 Commentaires sur le déroulement des épreuves et l'attitude des candidats

Les rapports de jury pointent souvent les mêmes lacunes des candidats quant au déroulement des épreuves orales, et ce rapport ne fera malheureusement pas exception. Le jury encourage donc les candidats à travailler sur ces points tout au long de leur année de préparation au concours. Ces remarques se veulent constructives et ont pour but d'aider les candidats à valoriser leurs connaissances et à gérer au mieux des épreuves dont le jury mesure bien la difficulté.

• Il est bon de s'écarter régulièrement du tableau pour laisser l'examinateur voir ce qu'on y a écrit. Quand l'examinateur demande de détailler un calcul, il est plutôt déconseillé de se contenter d'un laconique "J'obtiens ça." en pointant un résultat. Un des buts des épreuves orales est d'évaluer comment les candidats organisent leurs connaissances et mènent un raisonnement mathématique. Par exemple, l'explication d'un calcul peut avoir pour but d'évaluer comment le candidat a regroupé tel terme avec tel autre en vue d'une majoration (qu'on pense par exemple à la convergence des sommes de Riemann et au découpage d'une intégrale). L'examinateur peut aussi parfois chercher à faire corriger une erreur de calcul par le candidat lui-même. De manière générale, il faut tâcher de communiquer en s'appuyant sur le support écrit.

• Les candidats ont une tendance naturelle à effacer trop rapidement ce qu'ils ont écrit, y compris quand il s'agit d'un calcul intermédiaire qui pourrait encore leur être utile. La gestion du tableau est un élément d'appréciation lors de l'épreuve. Il est important d'écrire lisiblement, notamment pour éviter des erreurs de calcul grossières quand deux lettres se ressemblent. Il est déconseillé de commencer un calcul tout en bas d'un tableau pour continuer au bout opposé du même tableau.

• Il faut trouver un juste équilibre entre un mutisme total et un flot de paroles ininterrompu. Le jury apprécie de savoir où en est le candidat de ses réflexions, mais il n'est pas sûr qu'il soit dans l'intérêt du candidat de raconter tout ce qui lui passe par la tête. Il ne faut par ailleurs pas être surpris de voir l'examinateur quitter la salle quelques minutes en début d'épreuve.

• Le jury attend des candidats qu'ils prennent des initiatives. Il faut accepter de faire des choses seul au tableau, et ne pas quêter l'assentiment de l'examinateur à chaque ligne de calcul ou à chaque argument utilisé comme pour vérifier qu'on va dans la bonne direction. L'ENS prépare notamment au métier de chercheur pour lequel une grande autonomie est indispensable.

• L'examinateur ne cherche *jamais* à induire en erreur le candidat. Lorsque le candidat se trompe ou commet une bourde, il lui est toujours donné une occasion de se rattraper ou de se corriger. Dire une bêtise n'est pas éliminatoire, et le jury regrette que certains candidats perdent leurs moyens parce qu'ils estiment mériter une mauvaise note. L'appréciation du candidat sur ce point peut différer assez sensiblement de celle de l'examinateur. L'épreuve orale dure de 45 minutes à une heure, et c'est l'ensemble de la prestation du candidat qui est jugé.

• Les exercices posés sont parfois longs et le jury ne s'attend pas forcément à ce que les candidats en viennent à bout. Les candidats n'ont aucun intérêt à bâcler leurs arguments en fin d'oral dans le seul but d'arriver à la conclusion espérée. Cette stratégie est contre-productive car elle conduit invariablement à des erreurs. L'oral peut aussi comporter des digressions sur des points du cours et il faut être prêt à revenir sur une question qu'on avait momentanément délaissée. La réactivité est un autre élément d'appréciation lors de l'oral.

• Certains exercices sont laissés ouverts à dessein afin de tester la capacité d'analyse du candidat. Il arrive aussi que l'exercice en lui-même ne soit pas difficile mais que son énoncé soit déstabilisant. C'est un moyen de juger le recul que porte le candidat sur les notions qu'il a apprises tout au long de l'année. La stratégie qui consiste à considérer des cas particuliers est souvent appréciée, surtout lorsque ceux-ci sont significatifs. Il ne faut pas non plus tomber dans une démarche systématique pouvant faire perdre une dizaine de minutes au candidat dans le seul but de vérifier telle ou telle propriété sur la matrice nulle ou sur l'identité. Tous les exercices ne se prêtent pas à l'étude de cas particuliers.

• Le candidat doit bien écouter l'énoncé demandé ; certains donnent machinalement la solution d'un exercice qu'ils connaissent - ou croient connaitre - de mémoire sans se rendre compte qu'elle ne répond pas à la question posée. Il peut néanmoins être intéressant de faire des liens avec des résultats vus au cours de l'année quand cela s'y prête.

• Les épreuves orales se déroulent parfois en présence de public. Cela est soumis à l'acceptation du candidat. En *aucun cas* le jury ne voit d'un œil favorable ou défavorable le fait que le candidat refuse ou accepte la présence de tierces personnes. Les candidats doivent être conscients que le public peut représenter une pression supplémentaire si l'oral ne se déroule pas aussi bien qu'ils l'espèrent.

3 Commentaires mathématiques de détail

Les exercices donnés aux oraux des ENS sont difficiles ; le jury en est conscient. Ceci étant dit, il est indispensable que les candidats sachent se débrouiller honorablement des questions simples que le jury est amené (immanquablement) à leur poser. Nous ne répèterons jamais assez qu'il faut maîtriser son cours, c'est-à-dire savoir énoncer les résultats principaux du programme (avec leurs hypothèses et leurs conclusions), mais aussi connaître la démonstration de ceux-ci lorsqu'elle figure au programme. Le jury n'exigera jamais des candidats de produire la démonstration des théorèmes de Dirichlet ou de Fubini, pour ne citer que deux exemples. En revanche, les candidats doivent savoir retrouver pourquoi les sommes partielles de Fourier d'une fonction périodique de classe $\mathscr{C}^1$ convergent uniformément vers cette fonction, ou bien pourquoi la série produit de deux séries absolument convergentes est absolument convergente (on ne cite là encore que deux exemples).

Mentionnons quelques lacunes fréquentes : la décomposition en facteurs irréductibles des polynômes réels, le critère de prolongement en 0 d'une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ (un critère pourtant bien utile dans l'étude des équations différentielles), les hypothèses de l'inégalité de Bessel (sans parler de sa démonstration), la démonstration du critère de d'Alembert pour la convergence des séries. Par ailleurs, il est bon de pouvoir démontrer rapidement dans le cas de la dimension 2 les résultats du programme d'algèbre linéaire. Peu de candidats sont familiers avec le calcul de normes de matrices dans des cas pourtant simples, par exemple les matrices triangulaires supérieures de taille 2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ est rarement employée. La notation o mène régulièrement à des contre-sens en calcul différentiel. Trop nombreux sont les candidats qui ne comprennent pas que le fameux o est un élément d'un espace vectoriel normé, et pas un nombre réel, et qu'évaluer la norme de cet élément demanderait d'écrire $\|o(\|x\|)\|$. Sans doute une autre notation créerait elle moins de confusion, en particulier lorsque le o dépend d'un paramètre.

Malgré le très bon niveau général, on peut regretter que des candidats soient génés par des questions de logique élémentaire (négation de formules avec des quantificateurs) ou de dénombrements (par exemple, pour p premier, compter le nombre de polynômes unitaires irréductibles de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). Trop de candidats sont *aveuglés*, le terme n'est pas trop fort, par le fait que le terme général a_n d'une série convergente tend vers 0, au point même d'en oublier que la suite des sommes partielles converge. Rares sont ceux qui pensent à écrire a_n sous la forme $\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$ où la suite (ε_n) tend vers 0. Le jury regrette de continuer à entendre que le terme général d'une série convergente est nécessairement de la forme $o(1/n)$, ou bien que le coefficient d'une série entière de rayon 1 est toujours borné. Sans tomber dans une sophistication excessive (fonction continue nulle part dérivable ou autre), il est utile de connaitre des exemples et contre-exemples pour les différentes notions au programme.

La manipulation d'inégalités et de valeurs absolues est parfois peu rigoureuse. De nombreux candidats affirment procéder par "analyse-synthèse", ce qui peut être en effet une démarche efficace pour progresser dans la solution, mais ils doivent alors éviter les embrouillaminis logiques et tenir rigoureusement le fil de leur argumentation. Le jury a parfois demandé au candidat de transposer le raisonnement par l'absurde en un raisonnement direct.

De manière générale, les exercices d'analyse posent beaucoup de problèmes aux candidats. Dans une suite d'inégalités qui ne conduisent pas à l'estimation souhaitée, les candidats ont souvent du mal à reprendre la suite des arguments utilisés pour voir où une amélioration est possible (il est souvent opportun à ce moment de prendre un peu de recul par rapport au tableau). Certains préfèrent tout effacer, pensant leur démarche inutile alors qu'ils étaient parfois très proches de la solution. Dans l'étude des suites, les candidats prennent rarement l'initiative de regarder une suite plus simple dont le comportement asymptotique serait identique. Il n'est pas non plus interdit d'introduire des notations afin d'alléger des calculs et de réduire le risque d'erreurs. Enfin, peu de candidats prennent d'eux-mêmes l'initiative de montrer qu'une quantité a une limite en utilisant des ε, ou en ayant recours au critère de Cauchy. Quand le jury demande la définition de la convergence vers 0, une réponse fréquente est "ça veut dire être un $o(1)$".

Les débordements du programme de certaines classes préparatoires rendent rarement service aux candidats. Certains croient se souvenir d'une solution, ce qui paralyse leur réflexion ; d'autres recrachent des notions mal assimilées ou des résultats aux noms ronflants, ralentissant considérablement le déroulement de l'oral et produisant au final une impression négative sur le jury.

Le jury tient toutefois à souligner encore une fois le très bon niveau général des candidats, et la liste ci-dessus ne doit pas être prise comme une longue litanie d'erreurs que le jury rencontrerait invariablement lors de tous les oraux. La scolarité dans les ENS est exigeante, et il appartient au jury de s'assurer que les candidats ont suffisamment bien assimilé le programme des classes préparatoires pour la suivre. La réussite au concours passe avant tout par une bonne connaissance des résultats au programme et par la capacité à mettre en œuvre un raisonnement mathématique face au problème donné. Le jury espère que ses remarques aideront les candidats à aborder les épreuves des années futures dans les meilleures conditions.

4 Quelques exercices posés à l'oral spécifique Ulm

• *Exercice 1 (un théorème de Féjer).*

a) Soit n un entier strictement positif, et soit $\theta_\nu = (2\pi\nu)/(n+1)$, $\nu = 1, \ldots, n$. Vérifier que pour tout nombre complexe z de module strictement plus petit que 1, on a

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1 + z\,\mathrm{e}^{i\,\theta_\nu}}{1 - z\,\mathrm{e}^{i\,\theta_\nu}}\right) \geq 0\,.$$

b) Soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels. On suppose que la fonction f définie par

$$\forall\,\theta \in \mathbb{R}\,, \quad f(\theta) = 1 + \sum_{p=1}^{n} a_p \,\cos(p\,\theta) + b_p\,\sin(p\,\theta)\,,$$

prend des valeurs positives. Montrer que pour tout $r \in [0, 1[$, on a

$$1 + \sum_{p=1}^{n} a_p\, r^p \leq n + 1\,,$$

et en déduire $\sup_{\mathbb{R}} f \leq n + 1$.

c) Peut on trouver une meilleure majoration de $\sup_{\mathbb{R}} f$?

Commentaires : pour la seconde question, les candidats ont souvent commencé par montrer l'inégalité $1 + \sum_{p=1}^{n} a_p \leq 2\,n + 1$, qui est techniquement plus accessible mais qui n'est pas optimale. La dernière question était en lien avec une des épreuves écrites.

• *Exercice 2 (théorème de Toeplitz-Hausdorff).*

Pour deux vecteurs $X, Y \in \mathbb{C}^n$, on note $\langle X, Y\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} \overline{X_\nu}\, Y_\nu$ leur produit scalaire. La norme correspondante est notée $\|\cdot\|$, indépendamment de la dimension.

a) Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Décrire l'ensemble $\{\langle X, A\,X\rangle\,,\ X \in \mathbb{C}^2\,,\ \|X\| = 1\}$.

b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'ensemble $\{\langle X, A\,X\rangle\,,\ X \in \mathbb{C}^n\,,\ \|X\| = 1\}$ est convexe.

Commentaires : pour la première question, il est bien entendu utile, voire crucial, de faire des (grands) dessins. Il faut aussi accepter de se lancer dans des calculs, quitte à ne pas forcément bien savoir où l'on va. L'examinateur sera toujours là pour recadrer si besoin. Considérer des cas particuliers est une démarche qui peut s'avérer payante, encore faut-il ne pas extrapoler trop rapidement ce qu'on pense que va donner le cas général. Les candidats doivent savoir montrer rapidement qu'une matrice complexe de taille 2 se trigonalise dans une base orthonormée. La seconde question débordait souvent du temps imparti à l'épreuve orale.

• *Exercice 3.*

a) Soit $O \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble connexe par arcs et soit E un espace vectoriel normé complet. On note $\mathscr{L}_c(E)$ l'ensemble des endomorphismes continus sur E. Soit alors une application continue $f : O \to \mathscr{L}_c(E)$ vérifiant :

i) il existe un point $t_0 \in O$ pour lequel $f(t_0)$ est un isomorphisme,

ii) il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $t \in O$ et pour tout $x \in E$, on a $\|x\| \leq M \|f(t)\, x\|$.

Montrer que $f(t)$ est un isormorphisme pour tout $t \in O$.

b) Soit $h > 0$. Montrer que pour toute suite $g \in \ell^2(\mathbb{Z})$, il existe une unique suite $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ telle que

$$\forall\, j \in \mathbb{Z}\,, \quad u_j - \frac{u_{j+1} + u_{j-1} - 2\, u_j}{h^2} = g_j\,.$$

Commentaires : la première question n'est évidemment pas sans lien avec le fait que le groupe des inversibles dans $\mathscr{L}_c(E)$ forme un ensemble ouvert. La démonstration complète de cette propriété a parfois posé de gros problèmes aux candidats.

• *Exercice 4.*

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, vérifiant la propriété :

$$\forall\, x > 0\,, \quad f(x) > 0\,, \quad \forall\, x < 0\,, \quad f(x) < 0\,.$$

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la solution maximale de l'équation différentielle :

$$y'' + f(y') + y = 0\,, \quad y(0) = \alpha\,, \quad y'(0) = \beta\,,$$

est définie sur $\mathbb{R}^+$. Que peut-on dire de son comportement asymptotique quand le temps tend vers $+\infty$?

Commentaires : ici encore, mais on ne le répètera sans doute jamais assez, il est très utile de faire des dessins pour comprendre le portrait de phase de l'équation différentielle. Faire le lien avec un problème de physique est évidemment apprécié par le jury. Les candidats ont parfois été orientés vers l'équation différentielle $y'' + y = 0$ et vers l'influence du nouveau terme $f(y')$. Pour le comportement asymptotique, les candidats ont été amenés à étudier les valeurs d'adhérence de la courbe paramétrée $\{(y(t), y'(t)), t \geq 0\}$. Il s'agit bien entendu de démontrer un cas particulier du théorème de Poincaré-Bendixson.

• *Exercice 5.*

Soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des normes sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ qui sont subordonnées à une norme sur $\mathbb{C}^p$. Déterminer l'ensemble

$$\cap_{N \in \mathscr{N}} \mathscr{B}_N(0, 1)\,,$$

où $\mathscr{B}_N(0, 1)$ désigne la boule unité de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ pour la norme N.

Commentaires : le jury commençait souvent par demander aux candidats de montrer qu'une matrice dans l'intersection des boules unité ne pouvaient pas avoir deux valeurs propres distinctes.

• *Exercice 6 (lemme de Serre).*

On note $Gl_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices dans $Gl_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers dont l'inverse est également à coefficients entiers.

a) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers. Montrer que $M \in Gl_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si dét $M = \pm 1$.

b) Soit p un nombre premier impair. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad Gl_n(\mathbb{Z}) &\longrightarrow Gl_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\,, \\ M &\longmapsto (\overline{m_{ij}})_{i,j=1,\ldots,n}\,, \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes dont la restriction à tout sous-groupe fini de $Gl_n(\mathbb{Z})$ est injective.

c) En déduire une borne supérieure pour le cardinal d'un sous-groupe fini de $Gl_n(\mathbb{Z})$.

Commentaires : pour la seconde question, les candidats ont souvent été orientés vers l'étude du polynôme caractéristique d'une matrice dans le noyau de φ.

5 Quelques exercices posés à l'oral commun Ulm-Lyon-Cachan

• *Exercice 1.*

On considère la fonctionnelle

$$H(\lambda_1, \ldots \lambda_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 - 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \log |\lambda_i - \lambda_j|\,.$$

1. Montrer que cette fonctionnelle admet un minimum sur la partie $\mathscr{W} = \{(\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \lambda_1 > \cdots > \lambda_n\}$.
2. Montrer que ce minimum est atteint pour $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, où les γ_i sont les racines d'un polynôme $P(x)$ qui vérifie la relation,

$$P''(x) - xP'(x) + nP(x) = 0\,.$$

Commentaires : il s'agit d'un caractérisation des polynômes d'Hermite. La première question a su distinguer les candidats ayant bien compris les outils topologiques utiles pour démontrer l'existence de minima (asymptotique sur les bords du domaine, restriction à un compact, utilisation de la continuité).

• *Exercice 2.*

Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}$ une matrice symétrique, définie positive, telle que $(\forall i \neq j)\ a_{ij} < 0$.

1. Montrer que $\lambda = \inf\{x^T A x \ : \ x^T x = 1\}$ définit une valeur propre associée à un vecteur propre v à coordonnées strictement positives.
2. Montrer que cette valeur propre est simple.

3. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{u}_i(t) + (Au(t))_i = u_i(t)^2 \,, \\ u(0) = u^0 \,. \end{cases}$$

On admet l'existence d'une solution définie sur un intervalle maximal d'existence $[0,T)$. Montrer que si $\sum v_i u_i^0 > \lambda \sum v_i$ alors $T < +\infty$.

Commentaires : la première question a été bien traitée par les candidats avec quelques variations. Idem, la troisième question a été abordée de différentes manières, avec un certain succès. La méthode la plus simple (suggérée ici) consiste à multiplier à gauche par le vecteur propre v. Une méthode alternative consiste à multiplier par la solution $u(t)$ elle-même. On obtient alors un critère d'explosion différent de celui demandé ici. L'examinateur a laissé le candidat poursuivre son idée initiale, le cas échéant. Ce problème est la version matricielle de l'équation de la chaleur avec terme source non-linéaire $\partial_t u = \Delta u + u^2$.

- *Exercice 3.*

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à support compact dans $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \log\left(|x_1 - y_1|^2 + x_2^2\right) g(y_1)\, dy_1 \,, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \,,$$

vérifie

$$\begin{cases} \Delta u(x_1, x_2) = 0 \,, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ \lim\limits_{x_2 \to 0} \partial_{x_2} u(x_1, x_2) = g(x_1) \,, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \,. \end{cases}$$

2. Donner un équivalent de $\partial_{x_2} u(x_1, x_2)$, lorsque $x_2 \to +\infty$.
3. Identifier la limite de $\partial_{x_1} u(x_1, x_2)$ lorsque $x_2 \to 0$.

Commentaires : la notion de support compact a été expliquée aux candidats en tout début d'oral. Les calculs de dérivées partielles ont été généralement menés à bien en un temps raisonnable. Les justifications de la dérivation sous le signe intégral nécessitent une certaine rigueur, qui a rarement fait défaut. Les questions 2 et 3 ont été à peine abordées, faute de temps. La question 3 est conceptuellement plus difficile car elle nécessite d'éliminer la singularité de l'intégrale en x_1. On obtient finalement la transformation de Hilbert de la fonction g.

- *Exercice 4.*

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, périodique de période 2π. Chercher une solution du problème

$$\Delta u(x_1, x_2) = 0 \,, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \,,$$

telle que u est périodique dans la variable x_1, et qui vérifie $-\partial_{x_2} u(x_1, 0) = g(x_1)$.

2. Quelle est la limite de $-\partial_{x_2} u(x_1, x_2)$ lorsque $x_2 \to +\infty$?
3. On note $h(x_1) = -\partial_{x_1} u(x_1, 0)$. Montrer que $\|h\|_{L^2} = \|g\|_{L^2}$.

Commentaires : même exercice que le précédent, posé dans un cadre périodique qui fait intervenir des séries de Fourier. On retrouve de nouveau la transformée de Hilbert. Le travail d'analyse des candidats a été évalué. La phase de synthèse est ici délicate, la dérivation sous le signe somme nécessitant prudence et justification.

• *Exercice 5.*

1. Soit g un polynôme trigonométrique de période 1. Proposer des conditions sur $\omega \in \mathbb{R}$ pour pouvoir résoudre l'équation fonctionnelle suivante dans $\mathscr{C}^0_{\text{per}}(0, 1)$.
$$h(\theta) - h(\theta + \omega) = g(\theta)\,.$$
2. On considère un nombre ω tel que
$$\exists c, \alpha > 0 \quad \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad |q\omega - p| \geq c q^{-\alpha}\,.$$
Soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^r$, périodique de période 2π, telle que $\langle g \rangle = 0$. Donner une condition suffisante sur r et α pour pouvoir résoudre l'équation
$$h(\theta) - h(\theta + \omega) = g(\theta)\,,$$
dans $\mathscr{C}^0_{\text{per}}(0, 2\pi)$.

Commentaires : certains candidats ont été déroutés par la première question, qui demande de résoudre une équation sans chercher toutes les solutions. Des confusions logiques dans la phase d'analyse telles que « Je ne sais pas si h est développable en série de Fourier »ont été relevées (au final, on peut trouver une solution h sous la forme d'un polynôme trigonométrique, pourvu qu'on la recherche sous cette forme). La deuxième question a été l'occasion de discuter des sous-groupes de $\mathbb{R}$.

• *Exercice 6.*

1. Soit (E, N) un e.v.n. de dimension finie, muni d'un produit scalaire. Montrer que la fonction
$$N'(x) = \sup\{\langle x, y\rangle \ : \ N(y) = 1\}\,,$$
définit une norme sur E.
2. Déterminer la norme duale de la norme d'opérateur définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $|||A||| = \sup\{\|Ax\|_2 \ : \ \|x\|_2 = 1\}$, pour le produit scalaire canonique $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$.

Commentaires : pour la deuxième question, seule la restriction aux matrices symétriques a été menée à bien.

• *Exercice 7.*

Pour (n, K) des entiers, on note $\mathbb{A}(n, K)$ l'ensemble des matrices $n \times n$, à coefficients entiers $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, tels que $|a_{ij}| \leq K$. On note $L(n, K)$ l'ensemble des valeurs propres des matrices dans $\mathbb{A}(n, K)$.

1. Montrer que tout élément non nul de $L(n,K)$ est borné par au-dessus, et par en-dessous :
$$(nK)^{1-n} \leq |\lambda| \leq nK\,.$$
2. Montrer les propriétés suivantes de stabilité :
   (a) Si $(\lambda_1,\lambda_2) \in L(n_1,K_1)\times L(n_2,K_2)$ alors $\lambda_1\lambda_2 \in L(n_1n_2,K_1K_2)$
   (b) ... alors $\lambda_1+\lambda_2 \in L(n_1n_2,K_1+K_2)$
   (c) Si k est un entier et $\lambda^k \in L(n,K)$ alors $\lambda \in L(kn,K)$.

Commentaires : la question 2a. a été posée sans donner a priori le degré de complexité du produit $\lambda_1\lambda_2$ (ici n_1n_2, K_1K_2). Les candidats ayant eu le réflexe d'utiliser la première inégalité pour deviner la complexité de $\lambda_1\lambda_2$, et utiliser cette information pour imaginer la construction du produit tensoriel $A_1\otimes A_2$, ont été remarqués. La question 2c. a été posée pour $k=2$ (stabilité par passage à la racine carrée). Les candidats qui se sont inspirés d'exemples simples (ex : $\sqrt{2}$) pour construire la matrice B de complexité $2n$ ont été bien jugés.

• *Exercice 8.*

1. Soit $P(x)$ un polynôme à valeurs positives ($\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)\geq 0$). Montrer que P est la somme de deux carrés de polynômes : $P(x)=A(x)^2+B(x)^2$, avec $A(x),B(x)\in\mathbb{R}[X]$.
2. Soit P un polynôme à n variables, à valeurs positives, de degré 2. Alors P est la somme de carrés de polynômes.
3. Montrer que le polynôme $x^4y^2+x^2y^4-3x^2y^2+1$ est positif, mais n'est pas la somme de carrés.

Commentaires : bien que le contexte soit identique, les réponses aux deux premières questions utilisent des outils très différents. Le début de l'exercice a été propice à la discussion sur l'assertion « Les polynômes positifs s'écrivent comme somme de carrés ». Les candidats ont eu le choix de commencer par la question de leur choix. Pour la première question, l'examinateur s'est contenté de la somme de plusieurs carrés (2 ou plus). La troisième question a été rarement abordée. L'examinateur a alors demandé d'admettre que ce polynôme est effectivement positif (c'est une conséquence de l'inégalité arithmético-géométrique).

• *Exercice 9.*

1. Développement en monôme de $(x+y+z)^n$.
2. Soit P un polynôme homogène de degré d, à 3 variables x,y,z, tel que $P(x,y,z)>0$ pour tout $(x,y,z)\geq 0$, et non tous nuls. Montrer qu'il existe un entier n et un polynôme Q à coefficients strictement positifs tels que
$$P(x,y,z)=\frac{Q(x,y,z)}{(x+y+z)^n}\,.$$

Commentaires : cet exercice, qui mêle combinatoire et analyse, a été mené à bien par les candidats qui ont su calculer le produit $(x+y+z)^n P(x,y,z)$ en toute généralité. L'examinateur a pris soin d'intervenir pour que le calcul soit le plus élégant possible (en préservant une certaine symétrie dans les indices associés aux variables x, y, z). La capacité à rebondir sur des raisonnements d'analyse après le calcul combinatoire a été très appréciée chez certains candidats. Cet exercice est à nouveau un problème de représentation des polynômes à valeurs positives, comme le précédent.

• *Exercice 10.*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in (0,1)$. On définit le vecteur $u \in \mathbb{R}^n$,

$$u_i(p) = \sup_{\sigma\,:\,\sigma(0)=i} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} p^n A_{\sigma(n),\sigma(n+1)} \right\},$$

où le sup est pris sur l'ensemble des applications (chemins) de $\mathbb{N}$ dans $\{1,\dots,n\}$ tels que $\sigma(0) = i$.

1. Montrer que $u_i(p)$ vérifie

$$u_i(p) = \max_j \{A_{i,j} + p\, u_j(p)\}\ .$$

2. Montrer qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ et une constante λ telle que

$$\lambda + v_i = \max_j \{A_{i,j} + v_j\}\ .$$

Commentaires : le vecteur v est un vecteur propre associé à la valeur propre λ dans l'algèbre max-plus (le max remplace le $+$, et le $+$ remplace le $\times$). La première question a été bien gérée. En revanche la seconde a posé plus de problèmes, la difficulté majeure étant que le vecteur $u_i(p)$ n'est pas borné lorsque $p \to 1$, alors que la différence $u_i - u_j$ est bornée. Il faut donc extraire une sous-suite dans la différence des vecteurs pour obtenir le vecteur v à la limite. Ce théorème est l'analogue du théorème de Perron dans l'algèbre max-plus. Il caractérise les chemins de coût minimal dans un graphe.

• *Exercice 11.*

1. Donner des solutions de l'équation

$$(u'(x))^2 = 1\,, \quad u(0) = 0\,, \quad u(1) = 0\,.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Résoudre l'équation

$$(u_\varepsilon'(x))^2 - \varepsilon u_\varepsilon''(x) = 1\,, \quad u_\varepsilon(0) = 0\,, \quad u_\varepsilon(1) = 0\,.$$

Quelle est la limite de u_ε lorsque $\varepsilon \to 0$?

Commentaires : la première question a dérouté certains candidats, car elle semble en contradiction avec le théorème de Rolle pour les fonctions dérivables. Cette réaction a été très appréciée. L'examinateur attendait des fonctions en dent de scie joignant 0 et 1. L'application du théorème de Cauchy-Lipschitz pour montrer que la solution u_ε à la deuxième question vérifie nécessairement $|u'_\varepsilon| < 1$ n'a pas donné entière satisfaction chez certains candidats. C'est pourtant une information importante pour mener à bien les calculs explicites. Les solutions du premier problème obtenues comme limite du second lorsque $\varepsilon \to 0$ sont appelées solutions de viscosité.

• *Exercice 12.*

Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $H(0) < 0$. Résoudre l'équation

$$y'(x) = H(y(x)) , \quad x \in (0,1) ,$$

avec la condition $\int_0^1 y(x)\, dx = 0$. Est-ce que la solution est unique ?

Commentaires : exercice semblable au précédent, avec un cadre légèrement différent. La difficulté dans cet exercice est qu'il semble étranger au théorème de Cauchy-Lipschitz, même si ce n'est pas vraiment le cas (on peut remarquer que y doit s'annuler entre 0 et 1 et se ramener ainsi à un problème de Cauchy). Différentes stratégies ont été proposées (résolution semi-explicite, méthode de tir), avec une égale appréciation de l'examinateur.

• *Exercice 13.*

Soit $\mu > 4$, fixé. On cherche à déterminer l'infimum de

$$J(f) = \int_0^1 \left(\mu f'(x)^2 - \frac{f(x)^2}{x^2} \right) dx ,$$

lorsque f parcourt les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, continues sur $[0,1]$, avec $f(0) = 0, f(1) = 1$ et telles que f' est de carré intégrable.

1. Déterminer un possible candidat g.
2. Montrer que cette fonction réalise effectivement le minimum.

Commentaires : cet exercice nécessite une phase d'analyse qui s'inspire des idées de calcul différentiel en dimension finie. Aucune connaissance du calcul différentiel en dimension infinie n'est requise. Pour la deuxième question, les candidats ont été guidés vers la méthode de la variation de la constante, qui apparaît naturellement du moment que l'on résout une équation différentielle à coefficients non constants en 1. Cela revient à faire un changement de fonction $f(x) = C(x)g(x)$, où g est le candidat obtenu à la question 1.

• *Exercice 14.*

Soit p un nombre premier et n un entier. On note $v_p(n) = \max\{k,\, p^k | n\}$.

1. Montrer que

$$v_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

2. Montrer pour tout $x \geq 0$,

$$D(x) = [x] - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{30}\right] \geq 0\,.$$

3. En déduire que

$$\frac{(30n)!\, n!}{(15n)!\,(10n)!\,(6n)!}$$

est un entier.

Commentaires : plusieurs candidats avaient déjà vu la formule énoncée au 1. En voulant la démontrer trop rapidement, quelques candidats ont perdu beaucoup de temps, et ce même après que le jury ait donné des indications. Pour la deuxième question il fallait remarquer que la fonction $D(x)$ était 30-périodique. Des candidats ont ensuite procédé à une analyse au cas par cas. Bien que gourmande en temps, cette preuve de ténacité a été apprécié par le jury.

• *Exercice 15.*

1. Montrer que $E = \mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ est un anneau.
2. Montrer qu'un élément f de E peut s'écrire sous la forme $f = a_0 + \sum_{m=1}^{n}(a_m \cos mx + b_m \sin mx)$.
3. On note $\deg_t(f)$ l'entier n minimal pour lequel on a une telle décomposition. Montrer que $\deg_t(fg) = \deg_t(f) + \deg_t(g)$.
4. Montrer que $1 \pm \cos(x)$ est irréductible dans E.
5. A t'on unicité de la décomposition en produits irréductibles dans E ?

Commentaires : la première question est une prise de contact et a permis de se familiariser avec les polynômes à deux variables. Pour les questions 2. et 3., deux options étaient possibles : soit en utilisant les séries de Fourier, soit en se basant sur les formules de trigonométrie de linéarisation.

• *Exercice 16.*

Une fonction est dite strictement convexe ssi $f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$ pour $t \neq 0, 1$.

1. Donner un exemple de fonction convexe non strictement convexe (exemple C^0 puis C^1).
2. Soit P un polynôme réel, scindé sur $\mathbb{R}$ tel que $P > 0$ sur $[0, 1]$. Alors $1/P$ est strictement convexe sur $[0, 1]$.
3. Montrer que l'espace des matrices symétriques définies positives est un ouvert convexe.
4. Montrer que la fonction dét^{-1} est strictement convexe dans l'espace des matrices symétriques définies positives.

Commentaires : la première question a été l'occasion de commencer par une discussion sur les différentes caractérisations des fonctions convexes. Pour la deuxième question, il fallait calculer la dérivée seconde de $1/P$ et l'exprimer en terme de la dérivée logarithmique P'/P.

• *Exercice 17.*

Soient $a \in \mathbb{Q}_+^*$.

1. Déterminer $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z} = \{n + am, \text{ avec } n, m \in \mathbb{Z}\}$.
2. Montrer que $\mathbb{N} + a\mathbb{N} \cap [A, +\infty) = \mathbb{Z} + a\mathbb{Z} \cap [A, +\infty)$.
3. Qu'en est il lorsque a est un nombre irrationnel positif ?

Commentaires : la première question a beaucoup déstabilisé les candidats, alors qu'elle était essentiellement une question de cours. Il suffisait de remarquer que $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z} = \frac{1}{q}(p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z})$ si $a = p/q$. Les deux questions suivantes étaient de nature très différente, la deuxième étant une élaboration sur le théorème de Bezout alors que la dernière se réferrait aux sous-groupes fermés de $\mathbb{R}$. La dernière question était volontairement formulée de manière ouverte.

• *Exercice 18.*

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'ensemble de $P^{-1}MP$ avec $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ est fermé dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ ssi M est diagonalisable.
2. Montrer qu'il existe une matrice nilpotente N telle que l'adhérence de $P^{-1}NP$ avec $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ contient toutes les matrices nilpotentes.

Commentaires : la planche commençait souvent par une discussion de la densité des matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, résultat dont la preuve était très bien maitrisée par les candidats. Pour la première question plusieurs candidats ont eu la bonne idée de commencer par le cas de la dimension 2. La mise en place en dimension quelconque demandait de mener avec soin des calculs de produits matriciels, ce qui n'est en réalité pas évident dans les conditions difficiles d'un concours.