ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2012 **FILIÈRE PC**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – (XEULC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Ce sujet porte sur l'étude qualitative des solutions des systèmes d'équations différentielles autonomes $y' = f(y)$ avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On s'intéressera en particulier au comportement asymptotique de ces solutions.

Notations, définition, rappel

Dans tout le sujet, $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$ et de la norme euclidienne associée, notée $\|\ \|$, c'est-à-dire que pour

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ et } \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\,.$$

L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des matrices orthogonales de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $O_n(\mathbb{R})$. La matrice identité de taille n est notée I_n.

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ sera noté $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$.

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ deux fonctions. On note $f = o_{+\infty}(\varphi)$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall x \in [M, +\infty[\qquad |f(x)| \leq \varepsilon\varphi(x).$$

Les lettres I et J désigneront toujours un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition (Solution maximale). *Soit $I \neq \emptyset$. Une solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ de*

$$(E) \quad y' = f(y)$$

est une solution maximale si y est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et si pour toute autre fonction de classe $\mathcal{C}^1$ $z : J \to \mathbb{R}^n$ solution de (E) avec $z = y$ sur $I \cap J \neq \emptyset$ on a $J \subset I$.

On pourra utiliser le résultat suivant que l'on ne demande pas de démontrer :

Théorème 1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

et cette solution maximale est définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient t_0. Si $f(y)$ est linéaire en y, alors la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.

Préliminaire

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$\|\!|A|\!\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

1. Montrer que $\|\!|\ |\!\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que pour tous A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|\!|AB|\!\| \leq \|\!|A|\!\|\ \|\!|B|\!\|$.

Première partie : un exemple en dimension 1

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(P) \qquad \begin{cases} y' = ay\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où $a > 0$, $b > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que (P) admet une unique solution maximale $y : I \to \mathbb{R}$.

4. Soit $y_0 \in]0, b[$.

a) Montrer que pour tout $t \in I$, $y(t) \in]0, b[$.

b) Montrer que pour tout $t \in I$, on a

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{du}{u\,(1 - \frac{u}{b})} = at\,.$$

c) En déduire que $I = \mathbb{R}$ et donner $y(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ en fonction de y_0, a et b.

d) Donner les limites de $y(t)$ pour $t \to +\infty$ et pour$t \to -\infty$.

Deuxième partie : le cas linéaire

Dans cette partie, on étudie le problème

$$(L) \qquad \begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Y_0 \in \mathbb{R}^n$.

On définit $\varphi_A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par $\varphi_A(t; Y_0) = Y(t)$ où Y est la solution maximale de (L).

5. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y_0 \mapsto \varphi_A(t; Y_0)$ est linéaire injective. En déduire qu'il existe $e_A : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $(t, Y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\varphi_A(t; Y_0) = e_A(t)Y_0$.

6. *a)* Montrer que e_A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e'_A(t) = Ae_A(t)$.

b) Montrer que $e_A(0) = I_n$ et que pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, $e_A(t+s) = e_A(t)e_A(s) = e_A(s)e_A(t)$.

c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e_A(-t) = e_A(t)^{-1}$.

7. *a)* Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $e_{P^{-1}AP}(t) = P^{-1}e_A(t)P$.

b) Montrer que si A est une matrice diagonale dont les coefficients sont notés $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alors $e_A(t)$ est une matrice diagonale dont les coefficients sont $e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}$.

c) Dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculer $e_A(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

8. *a)* Soit α et β des constantes positives dans $\mathbb{R}$. Soit $\phi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie

$$\forall t \in [0, +\infty[\quad \phi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \phi(s)ds\,.$$

Montrer que pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a $\phi(t) \leq \alpha e^{\beta t}$.
Indication : On pourra étudier la fonction $F(t) = (\alpha + \beta \int_0^t \phi(s)ds)e^{-\beta t}$.

b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|e_A(t)\| \leq e^{\|A\||t|}$.

9. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction $\mathcal{C}^1$. Soit $Z_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère le problème de Cauchy

$$(U) \quad \begin{cases} Z'(t) = AZ(t) + g(t), \\ Z(0) = Z_0\,. \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Z(t) = e_A(t)\left(Z_0 + \int_0^t e_A(-s)g(s)ds\right)$$

est bien défini et solution du problème (U).

b) Montrer que si $\tilde{Z} : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution de classe $\mathcal{C}^1$ de (U) sur un intervalle ouvert contenant 0, alors $\tilde{Z}(t) = Z(t)$ pour tout $t \in I$.

10. *a)* Soit $a > 0$. Soit $\lambda \in]-\infty, -a[$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(t) = o_{+\infty}(e^{-at})$. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie $y' = \lambda y + g$. Montrer que $y(t) = o_{+\infty}(e^{-at})$.

b) On suppose dans cette question que A est une matrice triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i < -a$. Montrer que $\|Y(t)\| = o_{+\infty}(e^{-at})$ où Y est la solution maximale du problème (L).

c) On suppose ici que le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$. On suppose de plus que toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $\|e_A(t)\| = o_{+\infty}(e^{-at})$.

11. On suppose que A est dans $O_n(\mathbb{R})$ et que $A^2 + I_n = 0$.

a) Donner les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ et montrer que n est pair.

b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|e_A(t)\| = 1$.

Troisième partie : linéarisation

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Dans cette partie, on s'intéresse à la solution de

$$(S) \begin{cases} Y' = f(Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

pour $Y_0 \in \mathbb{R}^2$.

12. Soit $Y : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ une solution de (S). On suppose que $\lim\limits_{t \to +\infty} Y(t) = l \in \mathbb{R}^2$ existe. On souhaite montrer que $f(l) = 0$. On suppose donc par l'absurde $f(l) \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall t \in [M, +\infty[\quad \langle Y'(t), f(l) \rangle \geq \frac{1}{2} \|f(l)\|^2 .$$

b) Montrer que

$$\forall t \in [M, +\infty[\quad \langle Y(t), f(l) \rangle \geq (t - M) \frac{\|f(l)\|^2}{2} + \langle Y(M), f(l) \rangle .$$

c) En conclure que $f(l) = 0$.

13. Dans cette question, on suppose que

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} z + \alpha y (y^2 + z^2) \\ -y + \alpha z (y^2 + z^2) \end{pmatrix} \end{array}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $Y : I \to \mathbb{R}^2$ la solution maximale de (S).

a) Si $\alpha = 0$, montrer que $I = \mathbb{R}$ et identifier la solution maximale. Quelle est la nature de la courbe $t \mapsto Y(t)$?

b) On admet dans cette question que $[0, +\infty[\subset I$ lorsque $\alpha < 0$. Montrer que pour $\alpha < 0$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} Y(t) = 0$.
Indication : On pourra étudier la fonction $t \mapsto \|Y(t)\|^2$.

c) On suppose $Y_0 \neq 0$, $\alpha > 0$ et on pose $T = \frac{1}{2\alpha\|Y_0\|^2}$. Montrer que, si Y est définie sur $[0, T[$, alors $\lim\limits_{t \to T} \|Y(t)\| = +\infty$. En déduire $I \subset]-\infty, T[$.

14. Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$, dont toutes les valeurs propres sont strictement négatives et telle que $\|f(x) - Ax\| = o(\|x\|)$ quand $x \to 0$.

a) Montrer que A est la matrice jacobienne de f en 0.

b) Soit $Y : I \to \mathbb{R}^2$ la solution maximale de (S). On supposera que $[0, +\infty[\subset I$.
Montrer qu'il existe $a > 0$ et $K \geq 0$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t > 0$ on a

$$\|Y(t)\| \leq K e^{-ta} \left(\|Y_0\| + \int_0^t e^{sa} \varepsilon \|Y(s)\| ds \right)$$

dès que

$$\forall s \in [0, t] \quad \|f(Y(s)) - AY(s)\| \leq \varepsilon \|Y(s)\| .$$

c) En déduire qu'il existe $b > 0$, $\delta > 0$ et $C > 0$ tels que pour $Y_0 \in \mathbb{R}^2$ avec $\|Y_0\| \leq \delta$, on a

$$\forall t \in [0, +\infty[\quad \|Y(t)\| \leq C e^{-bt} .$$

d) Soit $y : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $z : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifient

$$\begin{cases} y' = zy\,(1 - y) \\ z' = y - z \\ y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0 \end{cases}$$

où $y_0 \in \mathbb{R}$ et $z_0 \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $|y_0 - 1|^2 + |z_0 - 1|^2 \leq \delta^2$, alors $y(t)$ et $z(t)$ tendent vers 1 lorsque t tend vers $+\infty$.

* *
*