EPREUVE ECRITE DE MATHEMATIQUES

ENS : PARIS – LYON – CACHAN

Durée : 5 heures ***Coefficients*** **: PARIS 5 – LYON 4 - CACHAN 5**

MEMBRES DE JURYS : B. ENRIQUEZ, D. GABORIAU, T. LEVY

L'objectif du problème est d'étudier un problème variationnel simple, dont le prototype est issu de la mécanique lagrangienne. Après l'étude de quelques exemples, comme la détermination des courbes de longueur minimale à extrémités fixées ou des surfaces de révolution d'aire minimale s'appuyant sur deux cercles donnés, on établit, sur un intervalle borné, les équations d'Euler-Lagrange et on étudie la variation au second ordre de la fonctionnelle à miniser au voisinage d'un point critique. La dernière partie du problème aborde, dans des cas particuliers, la résolution du problème variationnel sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Le fait de considérer des courbes dans des espaces fonctionnels a sans doute dérouté un certain nombre de candidats, surtout ceux ou celles qui étaient le moins à l'aise avec le calcul différentiel. Peu de copies ont été au-delà de la partie II-4, si l'on excepte la question III-1-i) qui a été souvent abordée, mais rarement avec succès.

Les correcteurs ont été cette année encore confrontés à de nombreuses justifications très vagues ou carrément fantaisistes. Il n'est donc peut-être pas inutile de rappeler qu'on ne saurait se contenter, en guise de réponse, de quelques lignes de calcul jetées sans autre commentaire sur le papier, à plus forte raison lorsque la réponse figure dans l'énoncé.

De même, s'il n'est pas toujours nécessaire d'énoncer complètement chaque théorème que l'on utilise, il est par contre *absolument indispensable* de s'assurer explicitement que toutes les hypothèses en sont satisfaites et, si possible, de le nommer. L'expression "par un théorème du cours" ne constitue en aucun cas une justification suffisante de quelque affirmation que ce soit.

Voici un commentaire plus détaillé de quelques questions et des erreurs les plus fréquemment rencontrées.

I-1 i) Le fait que l'intégrale d'une fonction sur un intervalle soit nulle n'entraîne pas que la fonction y soit identiquement nulle. C'est toutefois vrai lorsque la fonction en question est positive et continue.
ii) Certains n'ont pas vu que g devait être de calsse C^1, ce qui n'était pas le cas de la fonction proposée en exemple.

I-2 i) On n'attendait pas ici un calcul mais la réponse, qui est un théorème du cours. De nombreuses réponses fausses ont cependant été données.
ii) Là encore, on n'attendait pas de calcul direct, difficilement justifiable avec les outils du programme. Le résultat se déduisait aisément de l'expression de l'aire d'un secteur angulaire.

iii) Cette question a troublé de nombreux candidats. Peu ont pensé à déplier la surface de révolution pour en faire un domaine dont on a calculé l'aire à la question précédente. On a cependant admis d'autres justifications, si elles étaient suffisamment étayées.

I-3 Certains se sont trompés dans les bornes lors du changement de variable.

II-1 C'est à partir de cette question qu'apparaissaient des courbes dans des espaces de fonctions. Il fallait voir qu'on avait affaire à une intégrale dépendant d'un paramètre tout-à-fait classique et appliquer les théorèmes qui s'y rapportent.

II-2 i) Il suffisait ici de dire qu'en un minimum local, une fonction dérivable d'une variable réelle a sa dérivée nulle, mais il *fallait* le dire, ce que tous n'ont pas fait.
Les questions suivantes, jusqu'au II-3 inclus, étaient du même ordre et faisaient appel aux résultats des premières questions du problème.

II-4 On appliquait ici les résultats obtenus aux problèmes des courbes de longueur minimale et aux surfaces de révolution d'aire minimale.
ii) Le problème principal semble avoir été la compréhension des questions. Les candidats qui ont compris qu'il s'agissait de miniser une longueur n'ont en général pas eu de difficultés à fournir une réponse correcte.
ii) Ici en revanche, peu de candidats ont réussi à établir correctement l'équation (5).

III-1 De nombreux candidats ont tenté de résoudre un système linéaire à quatre équations et quatre inconnues. Certains y sont parvenus, mais pas tous. Il était beaucoup plus judicieux de remarquer que les conditions (12) entraînaient le fait que α et β étaient racines doubles du polynôme cherché, ce qui ne laissait plus guère qu'à déterminer son coefficient dominant, fourni par l'énoncé.