ÉPREUVE ORALE DE MATHÉMATIQUES – CONCOURS PC

ÉNS : PARIS ET LYON

Coefficient : Ulm option physique : 20 ; Ulm option chimie : 16 ; Lyon : 4

MEMBRES DE JURYS : C. BERNARDIN, J. GERMONI, E. GRENIER, J.-C. SIKORAV

Sur les 218 candidats convoqués, 179 se sont présentés à l'épreuve. La moyenne s'établit à 11,6, l'écart-type vaut 3,7, la médiane est à 12. Les notes s'échelonnent de 4 à 20.

Le jury s'est réjoui de voir d'excellents candidats, maîtrisant les notions au programme et très réactifs, voire inventifs face à des situations inhabituelles. Ceux-là ont une intuition des objets qu'ils manipulent, la guident volontiers avec des dessins, et parviennent à formaliser leurs idées ; on peut voir leur pensée se former et évoluer jusqu'à une solution de l'exercice. Ils ne sont cependant pas très nombreux.
Pendant l'oral, l'initiative est, autant que possible, laissée aux candidats, y compris s'ils se lancent à corps perdu dans des calculs. Il est donc conseillé d'avoir un regard critique sur ce que l'on est en train de faire, pour repérer au plus vite une impasse.
Certaines erreurs pèsent très lourd lorsqu'elles ne sont pas immédiatement corrigées : permuter aléatoirement les quantificateurs dans la définition d'une limite, proclamer que toute matrice est inversible (resp. diagonalisable), croire que si une suite ne tend pas vers un réel, c'est qu'elle tend vers $\pm\infty$, etc.

En analyse, les estimations “à vue” vont rarement de soi. Les manipulations d'inégalités sont en général très laborieuses, parfois circulaires, souvent sans but apparent. La notion d'équivalent pose problème. Plus généralement, l'aisance dans n'importe quelle forme de calcul est une vertu rare. En revanche, le théorème de convergence dominée pour les intégrales semble assez bien maîtrisé, du moins dans les situations usuelles.

L'algèbre linéaire est manifestement négligée, peut-être pas seulement par les candidats. Les mécanismes sont connus, mais pas compris. Une opération telle qu'un changement de base n'est perçue que comme un calcul, mais pas interprétée : par exemple, les candidats sachant ou comprenant rapidement pourquoi les matrices diagonales

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables étaient exceptionnels. Autre exemple : les candidats savent calculer le polynôme caractéristique, puis les valeurs propres d'une matrice : mais est-il *vraiment* nécessaire de les faire pour les matrices ci-dessus ? Un peu plus généralement, les valeurs propres d'une matrice triangulaires se voient sans calcul !
Le *sens* des invariants d'une matrice n'est pas perçu : l'importance du spectre est sous-estimée, alors qu'il gouverne toute la géométrie de la matrice (c'est-à-dire, ses propriétés à similitude près). Notons que même en dimension 2, la théorie de la réduction a un contenu : ce n'est pas parce qu'on est en petite dimension qu'il faut se lancer dans des calculs aveugles pouvant utiliser jusqu'à huit paramètres, quatre pour la matrice et quatre de plus pour la matrice de changement de base !

Pour éviter quelques erreurs et maladresses fréquentes, on pourra méditer les évidences suivantes, souvent mal comprises :

- il existe des suites qui n'ont pas de limite ; une suite positive qui tend vers zéro n'est pas nécessairement monotone, même à partir d'un certain rang ;
- pour calculer un équivalent d'une expression simple, il est souvent commode de "factoriser ce qui est grand" : on montre ainsi très facilement que $\ln(x+1)$ est équivalent à $\ln(x)$ lorsque x tend vers l'infini ;
- il n'est pas nécessaire d'utiliser la formule générale de $\sin(a+b)$ lorsque a est un multiple de 2π ;
- il existe des séries "très" convergentes : si le terme général est un $O(1/n!)$, il ne sera sans doute pas nécessaire de convoquer Stirling ; avant d'appeler d'Alembert à l'aide, il faut prendre garde à ne pas diviser par zéro ;
- pour connaître deux nombres (par exemple, le spectre d'une matrice 2×2), il suffit de connaître leur somme et leur produit (dans l'exemple, la trace et le déterminant) ;
- les valeurs propres d'une matrice triangulaire se lisent sur la matrice, sans calcul.