EPREUVE ECRITE DE MATHEMATIQUES

ENS : PARIS - LYON - CACHAN

Coefficients : PARIS 5 LYON 4 CACHAN 5

Membres de jurys : D. BRESCH, J. DELON, S. DESCOMBES, B. ENRIQUEZ.

Le problème de cette année portait sur une introduction classique aux bases de la méthode de décomposition en fréquences : méthodes qui ont une certaine importance dans l'étude de propagation de singularités au sein d'équations aux dérivées partielles (équations de Navier-Stokes, équations de Boltzmann par exemple). Le sujet était un peu long mais il y a eu quelques très bonnes copies avec un niveau d'ensemble globalement assez bon.

Une remarque préliminaire est de mentionner que le problème était à la fois très classique et difficile mais devait permettre aux candidats d'obtenir très facilement une note raisonnable même si il y avait relativement plus de questions du type "montrer que" que de questions du type "calculer". Les candidats ont en général bien traité les questions de type "cours" mais ont plus rarement réussi des questions demandants une certaine réflexion comme le fait d'observer que l'on a affaire à des sommes finies, la question QB3) sur la majoration, la question de la bornitude sur $\xi^3\psi(\xi)$. Certains candidats ont également essayer d'invoquer "le bon théorème" sans aucune justification.

Passons au détail des questions :

A1) Cette question est généralement réussie. Les candidats négligent parfois de dire quel théorème ils invoquent pour arriver au résultat ou ne détaillent pas bien leur récurrence.

A2) Généralement bien traitée car intuitive et l'indication forte utile.

A3) La question est bien traitée quand les candidats observent que les sommes sont finies (sauf que la plupart se contentent d'en déduire la régularité sans penser qu'il faut montrer que les sommes sont finies sur des intervalles et non en chaque point).

A4) C'est une question assez longue, avec des résultats très divers: beaucoup ne semblent pas voir que la nullité de la fonction sur un intervalle au voisinage de 0 impliquent son caractère $\mathcal{C}^\infty$ en ce point. On voit également quelques belles erreurs concernants somme de quotients et quotient de sommes.

B1) C'est une question plutôt bien traitée surtout la question proche d'une question de cours qui concerne la continuité d'intégrale à paramètre. En ce qui concerne la bornitude de $\xi^3\psi(\xi)$, certains candidats confondent intégration en x et bornitude en ξ ou ne l'ont pas traitée du tout.

B2) Cette question a été également bien traitée, à part pour le caractère $\mathcal{C}^\infty$. Ici encore, il ne suffit pas de regarder ce qui se passe en un point, mais dans un intervalle, ce que très peu ont vu.

B3) C'est une question difficile, puisqu'il fallait bien utiliser majoration, changement de variable et périodicité sur h dans le bon sens ou découper l'intégrale de manière non conventionnelle c'est-à-dire de $-\pi$ à π.

C1) et C2) Ces questions sont bien traitées en général même si parfois on voit quelques copies avec de grosses erreurs sur les changements de variables.

C3) Le début est bien traité par les candidats qui y sont arrivés. On voit tout de même pas mal de candidats qui ne se souviennent pas de l'inégalité de Parseval et qui passent directement de $|\hat{f}_r(k)| \leq |\hat{f}(k)|$ à $|f_r(x)| \leq |f(x)|$ puis à $||f_r||_2 \leq ||f||_2$.

D) Très peu de candidats y sont arrivés.

Pour conclure, nous voudrions insister sur les atouts mathématiques qui permettaient de faire un épreuve très raisonnable : récurrence, intégration par parties, régularité en un point ou sur un intervalle, utilisation adéquate de la périodicité, observation de la somme finie.