ÉPREUVE ORALE DE MATHÉMATIQUES – CONCOURS PC

ÉNS : PARIS ET LYON

Durée : 45 min
Coefficient : **PARIS option physique : 20 ; PARIS option chimie : 16 ; LYON : 4**

Membres de jurys : J. GERMONI, E. GRENIER, J.-C. SIKORAV, G. ZEGHIB

Sur les 226 candidats convoqués, 196 se sont présentés à l'épreuve. La moyenne s'établit à 11,6, l'écart-type vaut 3,9, la médiane est à 12. La distribution des notes est bimodale –un mode à 8, un mode à 15– ce qui est inhabituel. L'épreuve a réalisé un clivage entre des candidats proposant des prestations raisonnables et pouvant pour certains prendre des initiatives et des candidats nettement plus faibles, confus ou témoignant de grosses incompréhensions. L'étalement des notes entre 2 et 19 témoigne de la présence d'excellents candidats.

Pendant l'oral, l'initiative est, autant que possible, laissée aux candidats, y compris s'ils se lancent à corps perdu dans des calculs. Il est donc conseillé d'avoir un regard critique sur ce que l'on est en train de faire, pour repérer au plus vite une impasse. Si la question posée est très générale, il peut être utile de considérer des cas particuliers, des cas limites, voir ce qui se passe en petite dimension...

Nommer les objets que l'on manipule, c'est déjà exercer une forme de contrôle sur eux. Cela permet de les identifier –c'est déjà beaucoup– et d'alléger les notations –inutile d'écrire vingt fois $y_a((k+1)i/n)$. Il est parfois nécessaire d'inventer des noms de variables ou de coordonnées. Cela permet par exemple de constater que les matrices réelles 2×2 de trace nulle, "c'est" $\mathbb{R}^3$. Cela évite aussi de dire que la tangente à la chaînette $y = \operatorname{ch} x$ en (x, y) a pour équation $y = x \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x$.

En analyse, les estimations "à vue" vont rarement de soi. Les manipulations d'inégalités sont en général très laborieuses, parfois circulaires, souvent sans but apparent. La notion d'équivalent pose problème. Plus généralement, l'aisance dans n'importe quelle forme de calcul est une vertu rare. En revanche, le théorème de convergence dominée pour les intégrales semble assez bien maîtrisé, du moins dans les situations usuelles.
Il se dégage l'impression que l'idée de vitesse de convergence n'évoque rien à de nombreux candidats. Que l'on ait $|u_{n+1}| \leq u_n^2$, $|u_n| \leq C/n!$, $|u_n| \leq |u_n|/2$ ou $|u_{n+1}| \leq |u_n|$, cela ne fait apparemment pas grande différence dans le traitement de la suite (u_n)...

Les polynômes ont réservé quelques surprises. Quelques candidats semblent penser que tous les polynômes réels ont toutes leurs racines réelles, d'aures que tout polynôme réel qui ne s'annule pas est de degré 2. Tous connaissent le théorème de factorisation d'un polynôme réel en facteurs de degré 1 ou 2, mais bien peu savent ou savent utiliser que si $P(x_0) = 0$, $P(X)$ est divisible par $X - x_0$.

Les exercices d'algèbre linéaire semblent avoir moins causé de difficultés que les années passées.

Les points suivants ont souvent posé problème :

- montrer l'existence de la limite d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ (dans $\mathbb{R}$, sous des hypothèses favorables) ; utiliser l'inégalité des accroissements finis pour établir une majoration de la forme $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$ avec $k < 1$;
- simplifier une expression de la forme $o(x^2/r^2)$, lorsque r est une constante ;
- localiser les solutions d'une équation $f(x) = 0$ ou trouver leur nombre : l'étude des variations de f peut aider ; cela s'applique en particulier s'il faut placer un zéro de f par rapport à un point c en lequel on peut calculer le signe de $f(c)$;
- faire la différence entre $y' > 0$ et $y' \geq C > 0$; dans le même esprit, passer de l'inégalité $|f'(r)| < 1$ à une inégalité de la forme $|f'| \leq k < 1$ sur un voisinage de r ;
- comprendre l'évolution d'un système différentiel autonome lorsque les conditions initiales définissent un point stationnaire...
- exploiter le fait qu'une valeur propre est racine de tout polynôme annulateur d'une matrice, même lorsque celle-ci n'est pas diagonalisable ;
- savoir en quoi consistent les méthodes d'Euler ou de Newton.