Composition de Mathématiques, Filière PC
(XEULC)

Rapport de Mme Nicole SIMPSON et MM. Stéphane ATTAL et Frédéric BERTRAND, correcteurs.

Les notes des candidats se répartissent selon les données du tableau suivant :

$0 \leqslant \mathrm{N} < 4$	112	7,02 %
$4 \leqslant \mathrm{N} < 8$	619	38,81 %
$8 \leqslant \mathrm{N} < 12$	658	41,25 %
$12 \leqslant \mathrm{N} < 16$	182	11,41 %
$16 \leqslant \mathrm{N} \leqslant 20$	24	1,50 %
Total	1595	100 %
Nombre de copies : 1595		
Note moyenne 8,45		
Écart-type : 3,17		

1. Commentaires généraux

Les résultats de cette épreuve ont désagréablement surpris les correcteurs. Notre impression initiale était qu'il s'agissait d'un sujet simple, bien découpé, sans grande difficulté, en tout cas pour les 3 premières parties. Les résultats ont été extrêmement décevants. En effet, les notes étaient très basses et il a fallu sérieusement remonter les barèmes. Des questions pourtant élémentaires ont généré beaucoup de difficultés chez les étudiants, des rédactions parfois incroyablement longues et lourdes.

Concernant la présentation des copies, nous avons vu une explosion du nombre de copies très mal écrites, voire illisibles, raturées sur des pages entières, sans rédaction, sans phrase, uniquement avec des symboles mathématiques. On se moque du correcteur. Ce genre de copies ont été systématiquement sanctionnées. A partir de l'année prochaine, une partie de la note sera consacrée à la présentation et à la rédaction.

Autre chose, la copie que vous rendez ne doit pas être le lieu de vos réflexions, de vos essais et de vos erreurs, le brouillon est fait pour ça. La copie est un résultat final, réfléchi, rédigé et propre.

Dans le même ordre d'idée, mais en moins grave, il serait agréable pour les correcteurs que les candidats évitent d'écrire avec une encre bleue pâle sur des feuilles verts pâles. L'encre noire est franchement plus agréable à lire.

Concernant la stratégie, c'est en faisant les questions un peu difficiles, celles qui demandent un peu de travail, de réflexion ou de calcul, que l'on ramasse des points, pas en survolant toutes les questions et en répondant à toutes celles qui sont faciles. Cette épreuve était assez représentative. Il y avait un lot de petites questions faciles que systématiquement tout le monde a traitées (quitte même à sauter une dizaine de questions) mais qui n'apportaient que très peu de points. D'autres questions, largement accessibles avec un peu de réflexion ou de méthode apportaient bien plus de points et ont fait la différence entre les candidats.

2. Partie I

Cette partie I entièrement traitée pouvait rapporter 6 points sur 20.

1 a) Dans l'ensemble, une question plutôt bien traitée, si ce n'est qu'un nombre important de candidats n'ont tout simplement pas vu qu'il pouvait y avoir un problème d'integrabilité en 0.

1 b) Pas de difficulté pour la très grande majorité. Par contre, plusieurs ont conclu que $\Gamma(n) = n!$, alors que leur récurrence montrait clairement que $\Gamma(n) = (n-1)!$

1 c) Cette question classique de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre a été assez mal traitée dans l'ensemble. En général, l'erreur principale venait de la majoration : si on prend $s \in]0, +\infty[$, alors $|x^{s-1}|$ se majore différemment suivant que $x > 1$ ou $x < 1$, ce que peu de candidats ont vu.

2 a) Pas trop de difficultés en général, attention aux raisonnements parfois hasardeux avec les équivalents ou avec les $o(\cdot)$.

2 b) Question bien traitée, sans difficulté.

2 c) L'erreur la plus commune pour cette question a été de ne pas voir que la borne de l'intégrale dépendait aussi du paramètre. On ne peut pas appliquer le théorème de convergence dominée en dominant seulement la fonction à l'intérieur. Il fallait soit faire un changement de variable $x \mapsto x/m$ pour se débarrasser de cette dépendance, soit rentrer cette borne dans la fonction avec une fonction indicatrice.

3. Partie II

Cette partie II entièrement traitée pouvait rapporter 5 points.

La plupart des questions de cette partie sont des exercices vraiment basiques sur les valeurs propres et la notion de positivité des matrices symétriques réelles. Tout le monde doit les avoir fait dans sa deuxième année de formation. Nombre de fois a-t'on pu lire qu'une matrice symétrique est positive si et seulement si ses éléments diagonaux sont positifs ou encore si et seulement si son déterminant est positif. Ce sont des raisonnements difficilement acceptables à ce niveau.

3) Il est incroyable de constater à quel point une question aussi simple, aussi élémentaire, a donné lieu à des développements incroyables, à des rédactions prenant jusqu'à 3 pages.

4) Un grand classique. Plutôt bien réussi.

5) L'astuce de regroupement

$$\sum_{i,j} x_i \lambda_i \lambda_j a_{ij} x_j = \sum_{i,j} (\lambda_i x_i) a_{ij} (\lambda_j x_j)$$

a été trouvée par presque tout le monde.

6) Par contre l'astuce de regroupement

$$\sum_{i,j} x_i \langle\, u_i \,,\, u_j \,\rangle x_j = \sum_{i,j} \langle\, x_i u_i \,,\, x_j u_j \,\rangle = \langle\, \sum_i x_i u_i \,,\, \sum_j x_j u_j \,\rangle$$

a été trouvée par très peu de candidats.

7) L'argument qui manquait le plus souvent dans cette question était que les a_{ii} sont positifs, qui venait du fait que A est positive en appliquant 4) intelligemment. Trop peu d'étudiants l'ont vu. D'autres candidats ont malheureusement souvent utilisé l'argument faux suivant : si la somme de n réels a_i est positive alors toute combinaison linéaire à coefficients positifs des a_i reste positive.

8 a) Résultats décevants pour cette question où beaucoup de candidats ont lu trop vite l'énoncé. Il ne s'agissait pas de montrer que $A = Y\,{}^tY$ pour une *matrice* Y, en invoquant la diagonalisation, mais de montrer que A est somme de termes $Y\,{}^tY$ où les Y sont des *matrices colonnes.*

8 b) Voici l'exemple parfait de la question pas très difficile, valant beaucoup de points, mais que personne n'a vraiment tenté de faire. Ça demandait simplement d'écrire soigneusement $\langle\, X \,,\, A \star B\, X \,\rangle$ en utilisant 8 a).

4. Partie III

Cette partie permettait d'obtenir 8 points.

Autant être clair, on est entré avec cette partie dans une zone de confusion totale. Les candidats ont souvent confondu A^{*r} avec A^r. On a vu très souvent que les valeurs propres de A^{*r} sont les λ^r, où λ est valeur propre de A, etc.

9 a) Application directe de 3), succès mitigé.

9 b) Montrer que A est positive n'a pas posé de problème. Par contre, trouver la valeur critique de r a donné lieu à des calculs absolument impressionnants, sur des pages entières, avec des résultats incroyables comportant des racines de racines. Même si on ne voyait pas d'astuce de regroupement sur la forme quadratique, le calcul à la main des racines prenait quelques lignes. Quelques lignes de plus pour déterminer pour quels r elles sont toutes positives. Réponse $r = 1$ est la valeur critique.

Ceux qui ont trouvé un seuil supérieur à 1 ne se sont visiblement pas posé de question de cohérence avec le fait que $A = A^{*1}$ est positive.

10) Un regroupement comme dans la question 5). Question simple.

11) Une question plutôt difficile et ayant emporté un succès quasi-nul. Grâce aux questions précédentes on voyait que les puissances A^{*q} rationnelles sont positives. L'idée est de passer ensuite à la limite pour tous les réels. Encore faut-il être clair sur la façon dont on passe à la limite. Il ne suffit pas d'écrire que en approchant r par une suite de rationnels q_n alors A^{*q_n} tend vers A^{*r} et que la limite est encore une matrice positive. Est-ce si évident que cela ne vaut pas la peine de développer ? Surtout si auparavant le candidat a mis trois pages à caractériser les matrices 2×2 positives.

Ce genre de passage en force est très fréquent, nous l'avons souvent remarqué dans d'autres rapports. Soyons clairs, les correcteurs ne sont pas dupes, et énervé pour la suite de la correction.

12 a), b), c) d) Pas de problème en général sur ces questions. Une remarque, pour 12 c), la justification $\langle u , u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$ n'était pas toujours complète.

13 a) Encore une question facile.

13 b) C'était une question difficile et très bien notée. La première partie demandait de choisir $\lambda_i' = \lambda_i + p/2$, ce que peu ont vu.

La deuxième partie demandait d'argumenter assez clairement, en particulier sur le passage à la limite. C'est une question qui a été traitée correctement par très peu de candidats.

5. Partie IV

Cette partie comptait pour environ 7 points, mais nous ne détaillerons pas la façon dont les candidats ont répondu aux questions. Seulement 1% d'entre eux ont écrit quelque chose, le plus souvent pour grapiller des demi-points par ci par là, ou pour écrire n'importe quoi.