SESSION 2008

2nd concours

PHYSIQUE

École normale supérieure de Lyon

Durée : 3 heures

Ce livret comprend 6 pages numérotées de 1 à 6

Les calculatrices sont interdites.

Partie I - Questionnaire

Il est très vivement conseillé de ne pas consacrer plus de dix minutes à ce questionnaire.

I.1. Donner le nom, la valeur numérique, et l'unité des grandeurs suivantes : e, c, m_e et h (selon leur notation consacrée).

I.2. Donner la valeur numérique et l'unité :
- de la vitesse du son dans l'air (à 25°C et sous 1 atm.)
- du rayon de la Terre
- de la distance Terre-Lune
- de la distance Terre-Soleil

I.3. Définir et donner la valeur numérique d'une année-lumière.

I.4. Donner, en une ligne, les relations suivantes :
On veillera à utiliser les notations usuelles (sans les définir). Par exemple, loi d'Ohm : $U = RI$.
- Equation d'état des gaz parfaits
- Expression de la force de Coulomb
- Théorème de Gauss
- Equation de Maxwell-Ampère

Partie II - Systèmes de Poulies

Dans cette partie, nous allons étudier des systèmes de poulies. Nous supposons que les poulies sont des disques dont la masse est uniformément répartie. Les câbles sont inextensibles et leur masse sera toujours négligée. On suppose que les contacts s'effectuent sans frottement. L'accélération de pesanteur est notée $\vec{g}$.

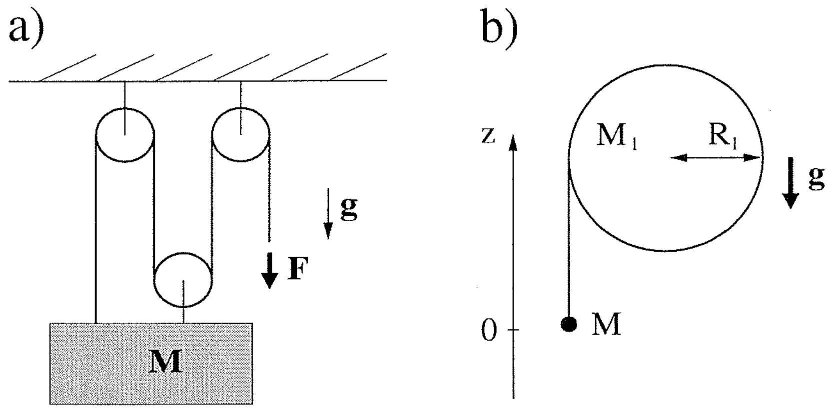

FIG. 1 –

II.1. Établir que le moment d'inertie, relativement à son centre, d'un disque de rayon R et de masse M, uniformément répartie, s'écrit :

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

II.2. On réalise un système de treuil à l'aide de trois poulies et d'un câble (voir figure 1a). Le câble est fixé à une masse M que l'on cherche à soulever. Dans cette question, les poulies ont une masse négligeable devant M. Les poulies sont disposées de telle sorte que le câble reste vertical entre deux poulies et que la masse reste horizontale.

Exprimer la force $\vec{F}$ qu'il faut exercer sur le câble pour maintenir la masse à l'équilibre.

II.3. Généraliser le résultat précédant à $2n + 1$ poulies.

II.4. On considère maintenant une poulie de masse M_1 et de rayon R_1 qui tourne autour de son centre. Une masse M est attachée à un câble enroulé (l'enroulement est supposé très long) autour de la poulie (voir figure 1b).

Établir l'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse M.

II.5. A l'instant initial ($t = 0$) et sans vitesse, on libère la masse à la position $z = 0$. Donner sa position $z(t)$ au cours du temps.

Partie III - Ecoulements de fluides complexes

Nous nous intéressons maintenant aux écoulements, à surface libre, de fluides visqueux incompressibles sur un plan incliné. L'écoulement est supposé parallèle et stationnaire. Son épaisseur, selon la direction perpendiculaire au plan, est notée h et le plan est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On note g l'accélération de la pesanteur, ρ la masse volumique du fluide, η sa viscosité dynamique, et P la pression. P_0 désigne la pression régnant au dessus du fluide. Le vecteur $\vec{e_i}$ désigne le vecteur unitaire selon l'axe (Oi).

On écrit alors le champ eulérien de vitesse sous la forme :

$$\vec{v} = v_x(x,y)\ \vec{e}_x$$

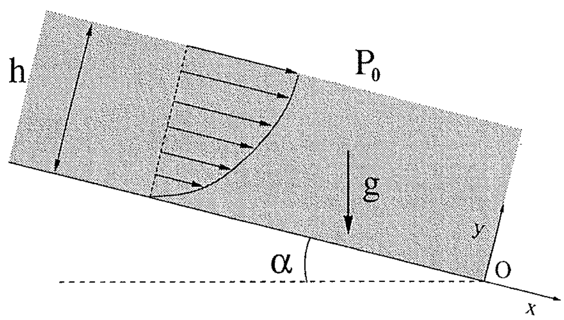

FIG. 2 –

On rappelle l'expression algébrique de la force de viscosité qu'exerce une tranche de fluide de surface S sur la tranche située immédiatement au-dessous :

$$F = \eta S \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

On rappelle l'équation de Navier-Stokes, dans le cas d'un fluide de viscosité constante :

$$\rho \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} P + \rho\ \vec{g} + \eta\,\Delta\vec{v}$$

III.1. Donner la dimension de la viscosité dynamique η.

III.2. On appelle *contrainte*, la grandeur définie par : $\sigma = F/S$,
et *taux de cisaillement*, la grandeur définie par : $\dot{\gamma} = \dfrac{\partial v_x}{\partial y}$.
On peut ainsi écrire : $\sigma = \eta\ \dot{\gamma}$.
Donner la dimension de σ et de $\dot{\gamma}$.

III.3. On peut définir la viscosité généralisée par :

$$\eta = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}}$$

Dans le cas général, cette viscosité n'est pas une constante mais peut dépendre du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, qui, *a priori*, est une fonction de y. A l'aide d'un appareil appelé rhéomètre (le préfixe "rhéo" désigne "écoulement") il est possible d'imposer à un fluide un taux de cisaillement fixé et de mesurer la contrainte qu'il subit. La figure 3 présente les résultats obtenus pour quatre fluides.

Représenter graphiquement l'allure des courbes η en fonction de $\dot{\gamma}$ pour ces quatre fluides.

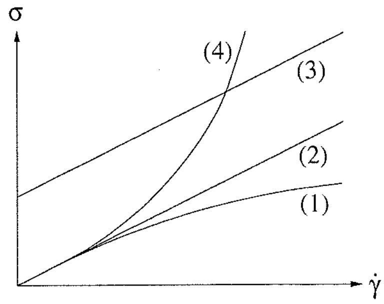

FIG. 3 –

III.4. Ces quatre fluides sont qualifiés de fluide :
- à seuil
- newtonien
- rhéo-épaississant
- rhéo-fluidifiant

A l'aide des courbes $\eta(\dot{\gamma})$, identifier chacun des fluides en justifiant votre choix.

III.5. Donner des exemples, de la vie courante, de fluides à seuil, rhéo-épaississant ou rhéo-fluidifiant.

III.6. En utilisant le fait que le fluide est incompressible, montrer que le champ de vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = v_x(y)\ \vec{e}_x$$

III.7. Commentez les différents termes de l'équation de Navier-Stokes.

III.8. En faisant un bilan des forces qui s'exercent sur une tranche élémentaire de fluide parallèle au plan incliné et d'épaisseur dy, montrer que la densité volumique de force de viscosité s'écrit :

$$\vec{f} = \frac{\partial}{\partial y}\{\eta(\dot{\gamma})\ \dot{\gamma}\}\ \vec{e}_x$$

III.9. En déduire l'équation de Navier-Stokes pour un fluide complexe.

III.10. On admettra que les conditions aux limites usuelles à la paroi et à la surface libre restent valables pour tous ces fluides :

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_x(y=0) & = & 0 \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y=h) & = & 0 \end{array}\right.$$

Justifier ces conditions aux limites.

III.11. On projetant l'équation de Navier-Stokes sur l'axe (Oy) établir l'expression de la pression P. En déduire $\partial P/\partial x$.

III.12. En projetant l'équation de Navier-Stokes sur l'axe (Ox), montrer que :

$$\eta(\dot{\gamma}(y))\ \dot{\gamma}(y) = a\ (b-y) \quad (*)$$

où a et b sont deux constantes que l'on explicitera.

III.13. On donne les relations $\sigma = \sigma(\dot{\gamma})$ suivantes pour les fluides (1), (2) et (3) :

$$\left\{\begin{array}{ll} (1) & \sigma = \kappa\ \dot{\gamma}^{1/2} \\ (2) & \sigma = \eta_0\ \dot{\gamma} \\ (3) & \sigma = \sigma_0\ +\ \eta_0\ \dot{\gamma} \end{array}\right.$$

Écrire l'équation (*) pour chacun des fluides.

N.B. L'équation (1) ne correspond pas exactement à la courbe (1) de la figure 3.

III.14. Résoudre ces équations pour les fluides (1) et (2) et en déduire les profils de vitesse correspondants.

III.15. Exprimer le débit volumique Q_1 (respectivement Q_2) correspondant au fluide (1) (respectivement (2)), pour une largeur d'écoulement (selon (Oz)) notée L.
A quelle condition le débit Q_1 est-il supérieur au débit Q_2 ? Interpréter ce résultat.

III.16. Exprimer la contrainte $\sigma(y)$ lorsque la couche de fluide (3) est au repos.

III.17. A quelle condition, portant sur h et α, le fluide (3) peut-il s'écouler ?

III.18. Lorsque cette condition est satisfaite, on observe le profil de vitesse schématisé ci-dessous : une couche superficielle glisse en bloc sur une couche basale cisaillée. Commenter ce profil. Exprimer l'épaisseur Δ de la couche superficielle.

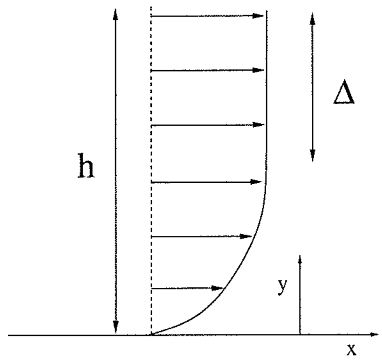

FIG. 4 –