

SESSION 2009

2nd concours

PHYSIQUE

École normale supérieure de Lyon

Durée : 3 heures

Ce livret comprend 8 pages numérotées de 1 à 8

Les calculatrices sont autorisées.

Questionnaire

Il est très vivement conseillé de ne pas consacrer plus de dix minutes à ce questionnaire.

1. Donner l'ordre de grandeur et l'unité de :
 - a) la vitesse du son dans l'air (dans les conditions normales de température et de pression),
 - b) les tailles caractéristiques d'un atome - d'une cellule - du rayon de la Terre - de la distance Terre-Soleil.

2. Définir et donner la valeur numérique d'un électron-Volt (1 eV).

3. Donner, *sans justification*, les éléments suivants :

On veillera à utiliser les notations usuelles (sans les définir). Par exemple, loi d'Ohm : $U = RI$

 - a) l'équation d'état du gaz parfait,
 - b) une équation de diffusion,
 - c) une équation de propagation,
 - d) la structure d'une onde plane électromagnétique dans le vide,
 - e) l'équation de Maxwell-Faraday,
 - f) le théorème de Bernoulli et une application immédiate.

Modèles atomiques

Dans l'histoire des sciences, plusieurs modèles de l'atome ont été développés, au fur et à mesure des découvertes des propriétés de la matière. Ce problème propose d'étudier différents modèles qui se sont succédés au début du XX^e siècle. Les deux parties sont, en grande partie, indépendantes.

Les valeurs numériques demandées seront calculées avec les données suivantes :

Charge élémentaire :	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron :	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton :	$m_p = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Célérité de la lumière dans de le vide :	$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Perméabilité du vide :	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$
Constante de Planck :	$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$

Les grandeurs \dot{x} et \ddot{x} désigneront, respectivement, les dérivées première et seconde, par rapport au temps, de la grandeur x .

Partie I - Modèle de Thomson

I.A Description.

Avec la découverte de l'électron en 1897, on savait que la matière était composée de deux parties : une négative, les électrons, et une positive. En 1904, le physicien anglais Joseph John Thomson (1856–1940) propose alors le modèle suivant pour l'atome d'hydrogène :

- il est constitué d'une sphère, supposée fixe, de centre O et de rayon a . La charge positive e de l'atome est répartie uniformément dans le volume intérieur de cette sphère.
- l'électron est une particule ponctuelle qui se déplace librement à l'intérieur de cette sphère ; on repère par M sa position et on note $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ son vecteur position.
- l'interaction gravitationnelle est négligée devant l'interaction électromagnétique.

I.A.1. Déterminer le champ électrique \vec{E} auquel est soumis l'électron à l'intérieur de la sphère, en fonction de e , a , ϵ_0 et \vec{r} .

I.A.2. En déduire l'expression de la force ressentie par l'électron, on posera $k_0 = e^2/(4\pi\epsilon_0 a^3)$. Pourquoi nomme-t-on (également) ce modèle "le modèle de l'électron élastiquement lié" ?

I.B Mouvement de l'électron.

- I.B.1. Établir que l'équation du mouvement de l'électron est celle d'un oscillateur harmonique à trois dimensions :

$$\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{OM} = \vec{0}$$

Exprimer la fréquence propre f_0 de cet oscillateur en fonction de m_e et k_0 .

- I.B.2. En prenant $a = 0,1$ nm, calculer la fréquence propre f_0 .
- I.B.3. À cette oscillation est associé un rayonnement électromagnétique. Quelle est alors la longueur d'onde associée à f_0 (pour une onde électromagnétique se propageant dans le vide) ? Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe-t-elle ?

I.C Interaction avec une onde électromagnétique.

On soumet l'atome d'hydrogène précédemment décrit à l'action d'une onde lumineuse plane représentée, notamment, par un champ électrique d'expression $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_z$ où E_0 est l'amplitude du champ électrique, ω sa pulsation et \vec{k} son vecteur d'onde. \vec{e}_z est le vecteur unitaire de l'axe Oz . Le mouvement de l'électron est supposé astreint à rester sur l'axe Oz . De plus, on se place dans le cas où la longueur d'onde λ associée à cette onde est telle que $\lambda \gg a$.

- I.C.1. En justifiant votre réponse, préciser l'ordre de grandeur de la vitesse de l'électron dans l'atome. Comparer cette valeur à c .
- I.C.2. Expliquer alors pourquoi l'influence du champ magnétique de l'onde peut être négligée.
- I.C.3. Justifier que les champs électromagnétiques sont uniformes au niveau atomique et que l'on peut écrire simplement le champ électrique sous la forme $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$.
- I.C.4. En déduire l'équation différentielle du mouvement de l'électron et en donner la solution, en régime permanent, $z(t)$ (coordonnée de l'électron selon Oz).
- I.C.5. *Analogie électrique* : proposer un circuit électrique présentant le même type de réponse.

I.D Diffusion de Rayleigh.

L'atome d'hydrogène, excité par une onde lumineuse, se comporte comme un dipôle électrique oscillant, de moment dipolaire $\vec{p}(t) = -e z(t) \vec{e}_z$, et rayonnant à son tour une onde électromagnétique. Pour la diffusion de Rayleigh, on a $\omega \ll \omega_0$, et on peut supposer que l'émission n'affecte pas la solution trouvée en (I.C.4).

- I.D.1. Justifier cette approximation et donner alors l'expression simplifiée du moment dipolaire $\vec{p}(t)$.
- I.D.2. Dans le cadre de l'approximation dipolaire, on rappelle que le potentiel vecteur créé par ce dipôle oscillant, au temps t et à la distance r , s'écrit :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t - r/c)}{r}$$

Justifier sa dénomination de potentiel retardé.

I.D.3. Dans la zone de rayonnement à très grande distance du dipôle ($r \gg \lambda$), on déduit l'expression, en coordonnées sphériques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$, du champ électromagnétique rayonné par le dipôle :

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \ddot{p}(t - r/c) \vec{e}_\theta \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r c} \ddot{p}(t - r/c) \vec{e}_\phi \end{cases}$$

Justifier que l'onde ainsi rayonnée possède une structure *localement* plane.

I.D.4. Exprimer le vecteur de Poynting \vec{R} associé à ce rayonnement. Représenter la variation du module de \vec{R} en fonction de l'angle θ , puis commenter ce diagramme.

I.D.5. Exprimer la puissance électromagnétique $P(t)$ rayonnée dans tout l'espace à travers une sphère de rayon r . Montrer que sa valeur moyenne temporelle peut s'écrire sous la forme $\langle P(t) \rangle = \alpha \omega^4 \langle p^2(t) \rangle$. Expliciter la constante α sachant que $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4/3$.

I.D.6. En admettant que les atomes de l'atmosphère présentent un comportement similaire à celui de l'atome d'hydrogène lorsqu'ils sont soumis aux rayons solaires, expliquer la couleur bleue du ciel en plein jour et la couleur du Soleil à son coucher (on supposera que le Soleil émet une puissance uniforme sur l'ensemble du spectre du visible).

I.D.7. Après avoir rappelé ce qu'est une lumière polarisée rectilignement, justifier que la lumière diffusée par le ciel est partiellement polarisée.

I.D.8. En revenant à la réponse électronique obtenue à la question (I.C.4), que se passe-t-il lorsque la pulsation ω , de l'onde, correspond à la pulsation atomique ω_0 ? Comment appelle-t-on ce phénomène? Justifier qu'il permet d'expliquer le rôle protecteur de la couche d'ozone dans l'atmosphère. Quelle correction peut-on apporter au modèle de Thomson pour que sa réponse soit plus réaliste? Proposer une origine à cette correction.

Le modèle atomique de Thomson (ou modèle de l'électron élastiquement lié) permet ainsi d'expliquer raisonnablement la diffusion de Rayleigh. Il fut, de plus, le premier à expliquer classiquement les spectres de raie d'émission atomiques observés expérimentalement (la fréquence d'émission d'une raie correspondant à la fréquence propre de l'oscillateur). Cependant, la compatibilité du modèle avec l'expérience n'est que partielle car les spectres d'émission possèdent en général plusieurs raies. Par exemple, pour l'atome d'hydrogène, les longueurs d'onde caractéristiques sont réparties selon la loi expérimentale de Balmer-Rydberg :

$$\frac{1}{\lambda_{np}} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \quad (\text{avec } n < p) \quad , \quad (1)$$

où n et p sont des entiers associés aux niveaux d'énergie et R_H est la constante de Rydberg.

Partie II - Modèle planétaire de Bohr

II.A Modèle planétaire classique.

La découverte du noyau par Rutherford en 1911 a permis de révéler la structure lacunaire de l'atome, ce qui constitua une contradiction avec le modèle de Thomson. Ainsi, un nouveau modèle de l'atome d'hydrogène a été envisagé avec une répartition différente de la charge positive e : celle-ci se trouve maintenant dans un noyau quasi-ponctuel de masse bien supérieure à celle de l'électron $m \gg m_e$. De plus, l'électron est supposé tourner en orbite circulaire, de rayon R , autour du noyau fixe en O , sous le seul effet de la force coulombienne.

- II.A.1. Pourquoi parle-t-on de modèle planétaire ? À quelles grandeurs mécaniques peut-on faire correspondre, par analogie, la constante ϵ_0 , la charge de l'électron et celle du noyau ?
- II.A.2. Justifier qu'il est légitime de considérer le noyau comme immobile.
- II.A.3. Montrer que le moment cinétique de l'électron, $\vec{l} = \overrightarrow{OM} \wedge m_e \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, est constant. De quel type de mouvement cette propriété est-elle caractéristique et quelle en est la conséquence sur la trajectoire ?
- II.A.4. Déterminer la vitesse v correspondant à cette orbite circulaire et en déduire la période T de rotation de l'électron, en fonction de ϵ_0 , m_e , e et R .
- II.A.5. Expliciter l'énergie potentielle dont dérive la force électrique. En déduire l'expression de l'énergie mécanique E , en fonction de ϵ_0 , e et R .
- II.A.6. En électromagnétisme, toute charge accélérée rayonne de l'énergie. La puissance rayonnée par un électron ayant une accélération a_c est donnée par la formule de Larmor (1857-1942) :

$$P_{ray} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a_c^x$$

Déterminer l'entier x à l'aide d'une analyse dimensionnelle.

- II.A.7. Expliquer pourquoi ce modèle planétaire classique semble incompatible avec la formule de Larmor.

II.B Modèle de Bohr.

En tenant compte des résultats déjà connus en 1913, Niels Bohr a ajouté au modèle précédent une condition de quantification du moment cinétique de l'électron sur une orbite. Il a écrit $l = n \hbar$ avec $n \geq 1$ ($\hbar = h/2\pi$ est la constante réduite de Planck).

- II.B.1. Déduire que le rayon des trajectoires de l'électron est quantifié, en exprimant R_n en fonction de n et R_1 (valeur de R_n pour $n = 1$). Exprimer et calculer le rayon de Bohr R_1 .
- II.B.2. Montrer que l'énergie mécanique est également quantifiée, en exprimant E_n en fonction de n et E_1 . Exprimer E_1 et la calculer en eV.
- II.B.3. Les transitions entre deux états d'énergie, E_i et E_f , sont accompagnées de l'absorption (si $E_f > E_i$) ou de l'émission (si $E_f < E_i$) d'un photon d'énergie $|E_f - E_i| = h \nu_{if}$. Retrouver la loi de Balmer-Rydberg (1) et déduire une expression de la constante de Rydberg R_H en fonction ϵ_0 , m_e , e , c et \hbar . Faire l'application numérique.

II.C Spectroscopie atomique.

II.C.1. La série de Balmer est la série de raies spectrales de l'atome d'hydrogène dans le domaine du visible, correspondant à une transition électronique d'un état quantique de nombre principal $n_i > 2$ vers l'état $n_j = 2$. Pour observer cette série, on utilise un spectrophotomètre comportant un réseau de 500 traits/mm. En incidence normale, démontrer la formule suivante, dite des réseaux :

$$\sin i_p = p \frac{\lambda}{d} \quad (2)$$

où p est l'ordre d'interférence, i_p l'angle de déviation correspondant à un maximum d'intensité transmise et d la distance entre 2 fentes successives.

II.C.2. Montrer, qu'avec ce réseau, la formule (2), pour l'ordre $p = 1$, peut être linéarisée sur la plage du spectre visible [400 nm, 800 nm]. Proposer un schéma de principe d'un spectrophotomètre.

II.C.3. Le spectrophotomètre est éclairé à l'aide d'une lampe à hydrogène qui est une lampe à décharge contenant de la vapeur d'eau. En réalité, cette lampe contient aussi 10% d'eau deutérisée car le deutérium, deux fois plus lourd, s'échappe moins facilement de l'ampoule que l'hydrogène. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau suivant :

Niveau d'énergie haut	Niveau d'énergie bas	λ en nm
3	2	656
4	2	486
5	2	434
6	2	410
7	2	397

TABLE 1 – Premières raies de la série de Balmer.

Vérifier la loi de Balmer-Rydberg de manière graphique et en déduire une valeur de la constante de Rydberg R_H .

II.C.4. Quelle correction devrait-on apporter à cette loi si l'on voulait tenir compte de la mobilité du noyau ? En déduire le décalage relatif $(\lambda_D - \lambda_H)/\lambda_H$ du spectre du deutérium par rapport à celui de l'hydrogène en fonction de m_e et m_p , appelé déplacement isotopique. Faire l'application numérique.

II.C.5. Un spectroscopie est caractérisé par son pouvoir de résolution $R \equiv \lambda/\Delta\lambda$ qui correspond au plus petit intervalle spectral $\Delta\lambda$ résolu autour de λ . En supposant que la résolution est limitée par la diffraction des N traits éclairés du réseau, montrer que $R = Np$ (appelé pouvoir de résolution intrinsèque). Dans l'expérience précédente, si le réseau est éclairé sur une largeur de 1 cm, les raies de l'hydrogène et du deutérium sont-elles distinguables ? En pratique, quels sont les autres phénomènes qui peuvent contribuer à limiter le pouvoir de résolution de l'instrument ?

II.C.6. Conclusion.

Quelques années après le modèle de Bohr, la naissance de la mécanique quantique a permis une nouvelle description de l'atome. De quelle manière décrit-on le comportement de l'électron dans le modèle quantique de l'atome d'hydrogène ?

Pour autant, les modèles précédents, de Thomson et de Bohr, ne peuvent pas être, *stricto sensu*, considérés comme "vrais" ou "faux" puisqu'ils décrivent correctement certains aspects de phénomènes physiques observés expérimentalement. Justifier le fait que le modèle de Thomson et celui de Bohr conservent une certaine réalité physique et qu'ils sont appelés "modèles semi-classiques".

* * *

Fin de l'épreuve