SESSION 2010

2nd concours

PHYSIQUE

École normale supérieure de Lyon

Durée : 3 heures

Ce livret comprend 5 pages numérotées de 1 à 5

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Partie I - Exercice : Mouvement dans un champ de force centrale

Dans cet exercice, on considère un point matériel M, de masse m, soumis à une force centrale :
$\vec{F} = f(r)\,\vec{u}_r$ où $r \equiv |\overrightarrow{OM}|$, $\vec{u}_r \equiv \dfrac{\overrightarrow{OM}}{|OM|}$,
de la part d'un point O, fixe dans notre référentiel d'étude, supposé galiléen.

I.1. Retrouver expression de l'accélération d'un point matériel en coordonnées cylindriques (a_r, a_θ et a_z).

I.2. Etablir la loi des aires et donner l'expression de la vitesse aréolaire en coordonnées cylindriques.

I.3. Démontrer la formule de Binet (ci-dessous) en faisant le changement de variable $u = 1/r$.

$$a_r = -C^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$$

I.4. On observe qu'un point matériel M soumis à une force centrale de centre O décrit une trajectoire circulaire de rayon R passant par O (figure 1).
Etablir une expression géométrique de la trajectoire du point M en coordonnées cylindriques (c'est-à-dire exprimer r en fonction de θ).

I.5. En déduire l'expression de la force centrale $f(r)$. Commenter cette expression.

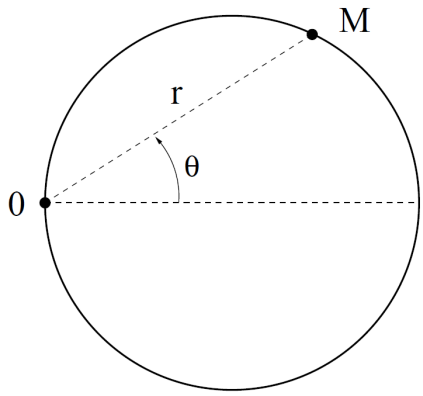

FIGURE 1 – Trajectoire dans un champ de force centrale

Partie II - Problème : Suspension de voiture

Dans ce problème, nous allons étudier un modèle de suspension de voiture. La suspension est constituée d'un amortisseur visqueux et d'un ressort, réliés à une roue sans masse et l'ensemble supporte une masse M représentant la voiture. Le coefficient d'amortissement est noté η et la raideur du ressort k. L'accélération de pesanteur est notée g.

La longueur à vide du ressort est notée l_0. Les altitudes de la roue (notée y) et de la masse (notée Y) sont prises "aux bornes" du ressort et de l'amortisseur (voir figure 2 ci-dessous). A l'équilibre la longueur du ressort est l_{eq} et on redéfini les origines de y et Y telles que $y_{eq} = 0$ et $Y_{eq} = 0$ à l'équilibre sur une route horizontale. On a donc : $l = l_{eq} + Y - y$.

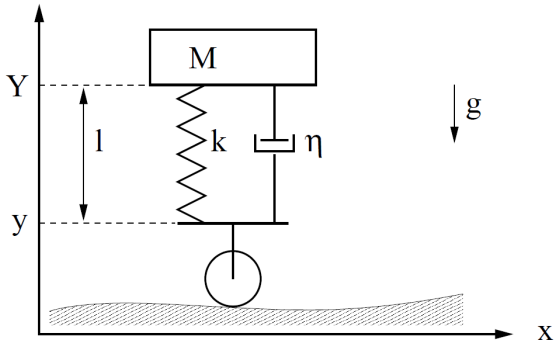

FIGURE 2 – Schéma d'une suspension de voiture

II.1. Exprimer l_{eq} en fonction de l_0, k, M et g.

II.2. Calculer la résultante des forces qui s'exercent sur la masse en fonction de l et $\dot{l}$.

II.3. Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement vertical de la masse M et montrer que cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{Y} + \frac{1}{\tau}\dot{Y} + \omega_0^2 Y = f(y, \dot{y})$$

où τ et ω_0 sont des constantes et f une fonction que l'on explicitera.

II.4. Justifier le nom d'oscillations harmoniques amorties forcées.

II.5. La voiture roule sur une route horizontale. A l'instant $t = 0$, la roue monte sur une marche de hauteur Δ. La figure 3 ci-dessous présente l'évolution de $Y(t)$.

Indiquer, en justifiant, **pour chaque courbe** si elle correspond ou non à une solution possible.

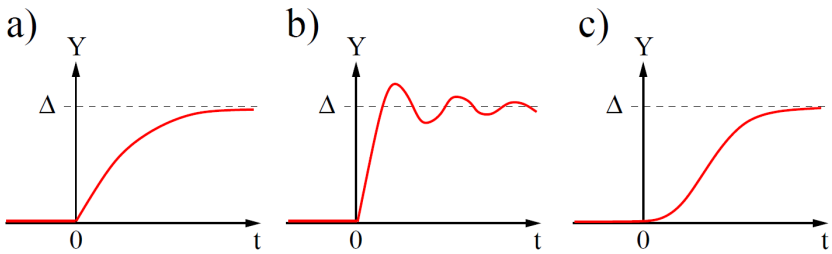

FIGURE 3 – Evolution de $Y(t)$

II.6. On s'intéresse maintenant au régime d'oscillations forcées en imposant à la roue un mouvement sinusoïdal. Dans ce régime oscillant, on utilisera les notations complexes : $\underline{y} = \underline{a}e^{i\omega t}$ et $\underline{Y} = \underline{A}e^{i\omega t}$. Montrer que l'équation différentielle établie précédemment peut alors s'écrire :

$$\underline{Y} = \underline{H}(\omega)\ \underline{y}$$

où $\underline{H}(\omega)$ est une fonction de transfert que l'on explicitera.

II.7. En introduisant une variable u (à définir) et un facteur sans dimension r (que l'on explicitera), montrer que l'on peut alors écrire :

$$\underline{H}(u) = \frac{1}{1 - \dfrac{u^2}{1 + i\,r\,u}}$$

II.8. Calculer les valeurs limites de $|\underline{H}(u)|$ et de $\arg(H(u))$ quand $u \to 0$ et $u \to \infty$.

II.9. La suspension constitue un filtre mécanique. La figure ci-dessous montre l'allure de la courbe $|\underline{H}(u)|$ pour différentes valeurs de r (r=1/2, 1 et 3).
Identifier les courbes correspondant aux différentes valeurs de r et commenter ces courbes.
En déduire la nature du filtre.

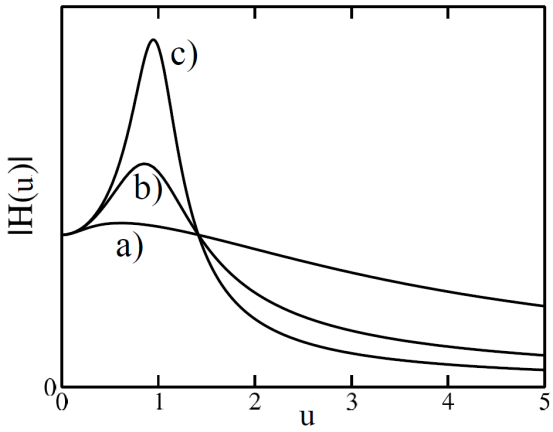

FIGURE 4 – Module de la fonction de transfert en fonction de u pour différentes valeurs de r

II.10. La voiture roule maintenant sur une route ayant un profil d'équation $y = a\cos(2\pi x/\lambda)$. On suppose que la roue reste en permanence en contact avec la route et que sa vitesse v selon l'axe horizontal (Ox) reste constante.
Exprimer la fréquence d'excitation ω en fonction de v et λ.

II.11. Dans le film *Le salaire de la peur*, réalisé par H.-G. Clouzot en 1953, un camion transportant de la nitroglycérine doit passer sur un pont fait de tôle ondulée. Pour éviter les secousses, le camion doit-il rouler lentement ou à vive allure (justifier votre choix à l'aide de l'allure de $|\underline{H}(u)|$) ?

II.12. En fait, la grandeur pertinente pour mesurer l'intensité des secousses n'est pas l'amplitude du mouvement du camion mais l'amplitude de l'accélération verticale A_{acc} qu'il subit.
Justifier que l'on peut écrire :

$$A_{acc}(\omega) = a\,\omega^2\,|\underline{H}(\omega)|$$

II.13. Calculer les valeurs limites de $A_{acc}(\omega)$ lorsque $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$.
A l'aide de la courbe $|\underline{H}(x)|$ donnée précédemment, tracer l'allure de $A_{acc}(\omega)$ pour $r = 1$.

II.14. Ce résultat vous ferait-il changer d'avis au sujet de la vitesse à adopter pour éviter les secousses trop importantes du camion de nitroglycérine ?

II.15. Le filtre mécanique réalisé par la suspension possède un équivalent électrique. Sur le circuit schématisé sur la figure 5, les dipôles notés 1, 2 et 3 possèdent des impédances notées Z_1, Z_2 et Z_3.

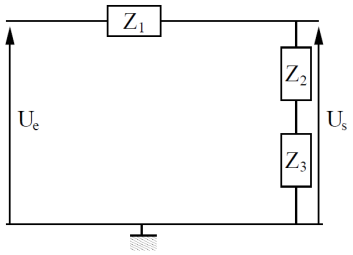

FIGURE 5 – Circuit éléctrique équivalent

En régime sinusoïdal, exprimer la fonction de transfert $\underline{H}$ en fonction de Z_1, Z_2 et Z_3.

II.16. On souhaite réaliser le circuit électrique correspondant à la suspension. Pour cela, on dispose d'une résistance R, d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L.

Expliquer (en justifiant votre choix) comment disposer ces trois composants, c'est-à-dire trouver qui de 1, 2 et 3 correspond à chaque composant.

II.17. Exprimer les relations que doivent vérifier R, L et C en fonction des grandeurs mécaniques M, k et η pour que les deux systèmes soient équivalents.