SESSION 2011

Second Concours de l'ENS de Lyon

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Le sujet est composé de 6 pages.

Les calculatrices sont interdites.

Dans ce problème $\mathbb{C}$ désignera le corps des nombres complexes. Le but est l'étude de l'image numérique d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$. La première partie est consacrée à la définition de cette image numérique et à quelques propriétés. Dans la deuxième partie, on caractérise entièrement cet ensemble dans le cas des matrices à deux lignes et deux colonnes. La dernière partie est consacrée à la démonstration du théorème de Toeplitz-Hausdorff qui établit la convexité de cet ensemble.

On attachera la plus grande importance à la clarté et à la précision des démonstrations, ainsi qu'à la présentation des copies.

Notations et rappels

Soient n un entier strictement positif et $\mathbb{C}^n$ l'ensemble des n-uplets $x = (x_1, \cdots, x_n)$. Pour x et y appartenant à $\mathbb{C}^n$, on note

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j$$

le produit scalaire de x et y. On note également, pour x appartenant à $\mathbb{C}^n$, la norme de x par

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}.$$

On note $M_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. Pour A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, on note A^* l'adjointe de A définie, pour $1 \leq i, j \leq n$, par

$$(A^*)_{ij} = \bar{A}_{ji}.$$

La matrice identité étant notée par I_n, une matrice U de $M_n(\mathbb{C})$ est dite unitaire si

$$U^*U = UU^* = I_n.$$

On dit que deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{C})$ sont unitairement équivalentes s'il existe une matrice unitaire U de $M_n(\mathbb{C})$ telle que

$$U^*AU = B.$$

On rappelle que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est unitairement équivalente à une matrice triangulaire supérieure.

On rappelle enfin qu'un sous-ensemble $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est dit convexe lorsque, pour tous x et y de $\mathcal{B}$, le segment $[x, y]$ est tout entier contenu dans $\mathcal{B}$, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in \mathcal{B}, \quad \forall t \in [0, 1], \qquad tx + (1-t)y \in \mathcal{B}.$$

Première partie : Image numérique, propriétés et exemple

Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, l'image numérique de A, notée $W(A)$ est le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par

$$W(A) = \{(Ax, x) \mid x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}.$$

En d'autres termes, $W(A)$ est l'ensemble des points de $\mathbb{C}$ s'écrivant (Ax, x) avec x appartenant à $\mathbb{C}$ de norme 1.

1. Montrer que $W(I_n) = \{1\}$. Plus généralement, montrer que pour A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$ et α, β deux nombres complexes,

$$W(\alpha A + \beta I_n) = \alpha W(A) + \beta.$$

2. Montrer que pour A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$,

$$W(A^*) = \left\{\bar{\lambda} : \lambda \in W(A)\right\}.$$

3. Montrer que toute les valeurs propres de A sont contenues dans $W(A)$.

4. Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

   (a) Montrer que l'application qui à A associe $\|A\|$ est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.

   (b) Montrer que pour A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, $W(A)$ est inclus dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $\|A\|$, c'est-à -dire l'ensemble des nombres complexes α tels que $|\alpha| \leq ||A||$.

5. Montrer que deux matrices unitairement équivalentes ont la même image numérique.

6. Soit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Pour θ et φ appartenant à $\mathbb{R}$ et t compris entre 0 et 1, on note

$$x = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} t \\ e^{i\theta}\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}.$$

   Déterminer $(A_1 x, x)$.

(b) En déduire que $W(A_1)$ est le disque fermé de centre 0 et de rayon $1/2$.

(c) Soit λ appartenant à $\mathbb{C}$ et $A_\lambda = \lambda A_1$, déterminer $W(A_\lambda)$. Montrer avec cet exemple que, contrairement au spectre, l'image numérique de deux matrices semblables peut être différente.

Deuxième partie : Cas des matrices de $M_2(\mathbb{C})$

7. Soit A une matrice appartenant à $M_2(\mathbb{C})$ de trace nulle, on suppose que A admet une valeur propre double. Montrer que A est unitairement équivalente à une matrice dont les deux éléments diagonaux sont nuls.

8. Soit A une matrice appartenant à $M_2(\mathbb{C})$ de trace nulle, on suppose que A admet deux valeurs valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2.

   (a) Montrer que $\lambda_2 = -\lambda_1$.

   (b) Soient e_1 un vecteur propre de norme 1 associé à la valeur propre λ_1 et e_2 un vecteur propre de norme 1 asocié à la valeur propre $-\lambda_1$. Pour θ appartenant à $\mathbb{R}$, on note

   $$z_\theta = e_1 + e^{i\theta} e_2,$$

   montrer qu'il existe θ_1 appartenant à $\mathbb{R}$ tel que

   $$(Az_{\theta_1}, z_{\theta_1}) = 0.$$

   (c) En déduire que A est aussi unitairement équivalente à une matrice dont les deux éléments diagonaux sont nuls.

9. Soient a et b appartenant à $\mathbb{R}$ tels que $0 < b \leq a$ et

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que

   $$W(A) = \left\{ t\sqrt{1-t^2}\,[(a+b)\cos\theta + i(a-b)\sin\theta] \mid \theta \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1 \right\}.$$

   (b) Préciser $W(A)$ quand $a = b$.

   (c) On suppose que a et b sont différents. Montrer que

   $$\{(a+b)\cos\theta + i(a-b)\sin\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{C} \mid |x-x_+| + |x-x_-| = 2(a+b)\}.$$

Indication : identifier géométriquement l'ensemble de gauche.
En déduire que $W(A)$ est l'ensemble des points x de $\mathbb{C}$ tels que

$$|x - x_+| + |x - x_-| \leq a + b,$$

et qu'il est convexe.

10. Soient maintenant a et b appartenant à $\mathbb{C}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

on introduit la forme polaire de a et b, $a = |a|e^{i\alpha}$ et $b = |b|e^{i\beta}$, et on définit S par

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer STS^{-1}.

(b) En déduire $W(A)$.

11. Déduire des questions précédentes l'ensemble $W(A)$ pour une matrice quelconque A de $M_2(\mathbb{C})$.

Indication : on commencera par se ramener au cas des matrices à trace nulle.

Troisième partie : Théorème de Toeplitz-Hausdorff et applications

12. Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$ et λ et μ deux nombres complexes distincts appartenant à $W(A)$. On note e_1 et e_2 deux vecteurs de norme 1 tels que

$$\lambda = (Ae_1, e_1),\ \mu = (Ae_2, e_2).$$

(a) Montrer que e_1 et e_2 sont linéairement indépendants.

(b) On note $\mathcal{M}$ le sous-espace de dimension deux engendré par e_1 et e_2, et $P_{\mathcal{M}}$ la projection orthogonale de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathcal{M}$. On note $A_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ la restriction de l'endomorphisme $x \mapsto P_{\mathcal{M}}Ax$ de $\mathbb{C}^n$. Montrer que pour x appartenant à $\mathcal{M}$,

$$(A_{\mathcal{M}}x, x) = (Ax, x).$$

(c) En déduire avec la deuxième partie que, pour une matrice quelconque A de $M_n(\mathbb{C})$, $W(A)$ est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{C}$ (théorème de Toeplitz-Hausdorff).

13. Soit A une matrice appartenant à $M_n(\mathbb{C})$ de trace nulle.

   (a) Montrer à l'aide du théorème de Toeplitz-Hausdorff qu'il existe u_1 de norme 1 tel que
   $$(Au_1, u_1) = 0.$$

   (b) Construire alors une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ sur laquelle la matrice représentative de A a ses éléments diagonaux tous nuls. En déduire que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est unitairement équivalente à une matrice dont les éléments diagonaux sont nuls.