ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2012

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION D'INFORMATIQUE

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Le but de ce sujet est l'étude de différents aspects algorithmiques et théoriques de la représentation des nombres. Dans tout le sujet, B désigne un nombre entier compris entre 2 et 10, et est appelé la *base de numération*, ou simplement la *base*. Dans les trois premières parties du sujet, les nombres entiers compris entre 0 et $B-1$ sont appelés *chiffres en base* B, ou simplement les *chiffres*.

Soit Σ l'ensemble constitué des chiffres en base B. On dit qu'un mot non vide $a_k \dots a_0$ sur Σ *représente* le nombre entier $n \in N$ en base B si

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i B^i.$$

Notons qu'il y a une légère ambiguïté de notations. Par exemple, 7 est à la fois un nombre, un symbole de l'alphabet Σ (quand $B \geqslant 8$), et un mot sur Σ qui représente l'entier 7 en toute base $B \geqslant 8$. Par convention, le mot vide représente l'entier zéro. Noter qu'avec la définition donnée ici, plusieurs mots peuvent représenter le même entier. Par exemple, en base dix, les mots 12, 012 et 0000012 représentent tous le nombre entier douze.

On admet le théorème classique suivant : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique mot en base B, appelé la *plus petite représentation en base* B *de* n, ne commençant pas par zéro, et représentant n. Noter que la plus petite représentation de zéro est le mot vide (en toute base). Si $a_k \dots a_0$ est la plus petite représentation de n en base B, on dit que $k+1$ est la longueur de n en base B, notée $L_B(n)$ (ou simplement $L(n)$ quand B est fixé).

On rappelle que si $n \in N$ et $d \in \mathbb{N}^*$ sont deux entiers naturels, alors il existe un unique couple d'entiers naturels (q, r) tel que $0 \leqslant r \leqslant d-1$ et $n = qd + r$. L'entier q est le *quotient* de n par d, et l'entier r est le *reste dans la division euclidienne de* n *par* d. On définit l'opération *modulo*, notée mod, par :

$$n \bmod d := r.$$

Soient $p > 0$ et $k \geqslant 0$ deux entiers. On rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *périodique de période p à partir du rang k* si pour tout $n \geqslant k$, $u_{n+p} = u_n$. On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *périodique* et le plus petit entier p tel qu'il existe un rang à partir duquel une suite est périodique est la *période* de la suite.

La première partie établit des résulats classiques utiles pour la suite. Les trois parties suivantes sont indépendantes.

Partie I. Généralités

1. Soit $\alpha > 0$ un nombre réel. Montrer que pour toute base B fixée $\lim_{n\to\infty} L_B(n) = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty} L_B(n)/n^\alpha = 0$.
   Indication : on pourra encadrer $L(n)$ par des fonctions usuelles.
2. Soit $d \geqslant 1$ un entier. Montrer que la suite $(B^n \bmod d)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.
3. Donner la période de la suite définie à la question précédente pour $B = 2, d = 3$, pour $B = 10, d = 7$ et pour $B = 10, d = 6$.
4. Montrer que si d est un nombre premier qui n'est pas un diviseur de B, alors la suite $(B^n \bmod d)_{n\in\mathbb{N}}$ a une période qui est un diviseur de $d - 1$.

Partie II. Automate et critère de divisibilité pour les nombres entiers

Le but de cette partie est de fournir pour tout entier $d \geqslant 2$ un automate $\mathcal{A}_{B,d}$ reconnaissant le langage $\mathcal{L}_{B,d}$ des représentations en base B des nombres entiers divisibles par d.

Il est plus commode pour l'automate de lire les nombres en commençant par la fin. Donc, par définition, un mot $a_0 \ldots a_k$ sur Σ appartient à $\mathcal{L}_{B,d}$ si et seulement si le nombre entier représenté par $a_k \ldots a_0$ est divisible par d.

1. Montrer que l'automate représenté à la figure 1 reconnaît le langage $\mathcal{L}_{3,2}$. Donner une expression régulière pour $\mathcal{L}_{3,2}$.

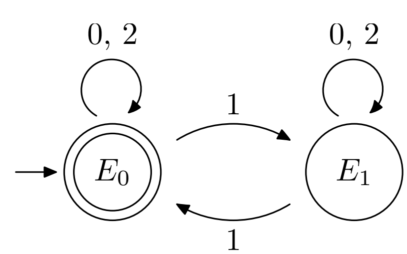

Figure 1 – Automate pour la divisibilité par 2 en base 3

2. Ecrire en base deux les nombres entiers de zéro à dix, et pour chacun d'eux dire dans quel état termine l'automate de la figure 2.

3. Soit x un mot de longueur l tel que l'automate de la figure 2 termine sur l'état $E_{i,j}$. Montrer que $l \bmod 2 = i$.

4. Montrer que l'automate représenté à la figure 2 reconnaît le langage $\mathcal{L}_{2,3}$. Noter qu'il y a deux états finaux.

5. Donner un automate à trois états reconnaissant le langage $\mathcal{L}_{2,3}$.

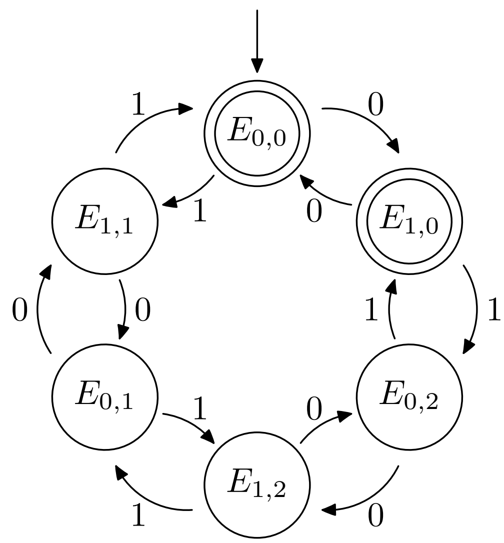

Figure 2 – Automate pour la divisibilité par 3 en base 2

6. Donner un automate à trois états reconnaissant le langage $\mathcal{L}_{10,3}$.

7. On suppose que $B \bmod d = 1$. Expliquer comment construire un automate à d états reconnaissant $\mathcal{L}_{B,d}$.

8. On suppose que $d = B^m$ où $m \geqslant 1$ est un entier. Expliquer comment construire un automate déterministe à $m+2$ états reconnaissant $\mathcal{L}_{B,d}$.

9. On suppose que la suite $(B^n \bmod d)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir du rang 0, de période p. Expliquer comment en général construire un automate reconnaissant $\mathcal{L}_{B,d}$. *Indication* : construire un automate avec dp états $E_{i,j}$ avec $0 \leqslant i \leqslant p-1$ et $0 \leqslant j \leqslant d-1$. Pour tout i, j, l'état $E_{i,j}$ s'interprète comme "l'automate en est au chiffre de rang i modulo p, et le nombre lu jusqu'à présent est égal à j modulo d". Noter que l'automate suggéré par l'indication n'est pas nécessairement l'automate minimal reconnaissant $\mathcal{L}_{B,d}$.

10. Expliquer comment construire un automate reconnaissant $\mathcal{L}_{B,d}$ en général.

11. Peut-on construire un automate similaire à celui de la question précédente, mais qui lise les nombres "en commençant par le début" ? La construction explicite de l'automate n'est pas demandée, mais on justifiera, au moins informellement, la réponse.

Partie III. Représentation des nombres réels

Afin de ne pas alourdir les notations, on se restreint au cas des réels de $[0, 1]$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de chiffres en base B. On pose :

$$x_n = a_1 B^{-1} + a_2 B^{-2} + \cdots + a_n B^{-n}$$

On dira que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *représentation* du nombre réel $x \in [0,1]$ si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. On écrit alors $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$. Il faut noter que pour n'importe quel choix de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Dans le cas où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est périodique, de période p à partir du rang k, on utilise la notation suivante :

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{k-1}\overline{a_k a_{k+1} \ldots a_{k+p-1}}.$$

Par exemple, en base 10, $1/12 = 0,0833333\ldots = 0,08\overline{3}$.

1. Deux suites de chiffres $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ peuvent-elles représenter le même nombre réel ?
2. Soit n un nombre entier dont une représentation en base B est $a_1 \ldots a_k$. Montrer que $0, \overline{a_1 \ldots a_k}$ est une représentation de $n/(B^k - 1)$.
3. Soient u et v des entiers naturels, avec $u < v$. On définit les suites $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(q_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ par l'algorithme suivant :

```
r_0 ← u
k ← 1
Tant que Vrai
  On définit r_k et q_k par :
  B r_{k-1} = v q_k + r_k, avec 0 ⩽ r_k < v.
  k ← k + 1
Fin Tant que
```

   On notera que l'algorithme tourne indéfiniment. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$

$$\left|q_1 B^{-1} + q_2 B^{-2} + \cdots + q_n B^{-n} - u/v\right| \leqslant B^{-n}.$$

   En déduire que $0, q_1 q_2 q_3 \ldots$ est une représentation de u/v.
4. Montrer que les suites $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(q_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définies par l'algorithme précédent sont périodiques. Donner un algorithme qui termine et renvoie leur période.
5. Montrer qu'un nombre réel de $[0,1]$ est rationnel si et seulement s'il admet une représentation périodique en base B.
6. Soit p un nombre premier qui n'est pas un diviseur de B. Montrer que $1/p$ a pour représentation $0, \overline{a_1, \ldots a_k}$ où k est un diviseur de $p-1$. Montrer que le nombre entier n représenté par $a_1 \ldots a_k$ vérifie $np = B^k - 1$.
7. Soit p un nombre premier qui n'est pas un diviseur de B. On suppose en outre que la suite $(B^n \bmod p)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour période $p-1$, et que $1/p$ a pour représentation $0, \overline{a_1 \ldots a_{p-1}}$. Soit n l'entier ayant pour représentation $a_1 \ldots a_{p-1}$. Soit k un entier compris entre 2 et $p-1$. Montrer qu'il existe un entier k' compris entre 2 et $k-1$ tel que $a_{k'} \ldots a_{p-1} a_1 \ldots a_{k'-1}$ est une représentation en base B de l'entier kp.

   Indication : montrer que la suite $(B^n \bmod p)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prend toutes les valeurs possibles entre 0 et $p-1$.
8. Donner un nombre entier $n > 0$ ayant une représentation en base dix constituée de six chiffres, et dont les six premiers multiples (c'est-à-dire n, $2n$, …, $6n$) s'obtiennent en permutant circulairement les six chiffres.

Partie IV. Un système de numération avec des chiffres négatifs

Dans cette partie, $B = 3$, et on définit les chiffres en base B comme étant les nombres entiers 0, 1 et -1. On remarque donc qu'il y a un chiffre négatif. Soit Σ l'alphabet constitué des chiffres en base B. On dit qu'un mot non vide $a_k \dots a_0$ sur Σ représente le nombre entier $n \in \mathbb{Z}$ en base B si

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i B^i.$$

Par convention, le mot vide représente l'entier zéro. Le chiffre -1 sera noté $\overline{1}$ pour simplifier l'écriture et la lecture des mots. Ainsi, le mot $1\overline{1}0\overline{1}\overline{1}11$ représente l'entier $3^6 - 3^5 - 3^3 - 3^2 + 3 + 1 = 454$.

Pour la description des algorithmes demandée ci-dessous, on pourra utiliser tout langage impératif ou fonctionnel, ayant un niveau de détail proche de Pascal, CAML ou C, ou donner un pseudo-code détaillé, par exemple dans le style de celui fourni dans la partie III.

La représentation d'un nombre entier sera implémentée comme un tableau ou une liste d'entiers contenant les chiffres (dans les énoncés des question, les tableaux sont utilisés, mais le candidat peut utiliser des listes à la place). Plus précisemment, la représentation $a_k \dots a_0$ sera stockée dans un tableau T tel que $T[0] = a_0, \dots, T[k] = a_k$.

1. Donner une représentation pour chaque nombre entier de $[-5, 5]$.

2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, il existe un unique mot sur Σ, appelé la *plus petite représentation de* n, ne commençant pas par zéro, et représentant n. Donner un algorithme pour calculer les chiffres de la plus petite représentation d'un entier n quelconque (cet algorithme peut être utilisé comme preuve d'existence de la décomposition).

Pour les quatre questions qui suivent, on demande des algorithmes qui calculent directement à partir des chiffres de représentations, sur le modèle de l'algorithme d'addition des représentations en base 10 enseigné à l'école primaire. En particuler, il est interdit d'utiliser les fonctions multiplications et exponentiation du langage, et *a fortiori* toute fonction plus évoluée. Seules l'addition et les structures de contrôle élémentaires (tests, boucles, ...) sont autorisées. L'efficacité des algorithmes sera prise en compte pour la notation.

3. Donner un algorithme qui prend en entrée un tableau représentant un nombre entier, et renvoie un tableau représentant son opposé.

4. Donner un algorithme qui prend en entrée un tableau représentant un nombre entier et renvoie un tableau représentant son successeur.

5. Donner un algorithme qui prend en entrée deux tableaux représentant deux nombres entiers et renvoie la représentation de leur somme.

6. Donner un algorithme qui prend en entrée deux tableaux représentant deux nombres entiers et renvoie la représentation de leur différence.

⋆ ⋆
⋆