ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2012

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

⋆ ⋆ ⋆

Ce livret comprend 6 pages, numérotées de 1 à 6.

Les parties I et II sont totalement indépendantes.

Partie I - Exercice : Optique géométrique des arc-en-ciels

Dans cet exercice nous allons étudier la trajectoire d'un rayon lumineux dans une goutte d'eau entourée d'air, sous les hypothèses de l'optique géométrique. La figure 1a présente un rayon lumineux arrivant du soleil (situé à l'infini) et qui subit une première réfraction, puis une réflexion sur la surface interne de la goutte et enfin une deuxième réfraction. Les angles indiqués sur la figure sont définis par rapport à la normale à la surface de la goutte. On note n l'indice de réfraction de l'eau et l'indice de l'air est considéré comme égal à 1.

On appelle déviation D l'angle dont le rayon est dévié lors d'une réflexion ou d'une réfraction sur un dioptre. Ainsi, sous incidence normale, la déviation du rayon réfracté est nulle $D = 0$ alors que celle du rayon réfléchi vaut $D = \pi$.

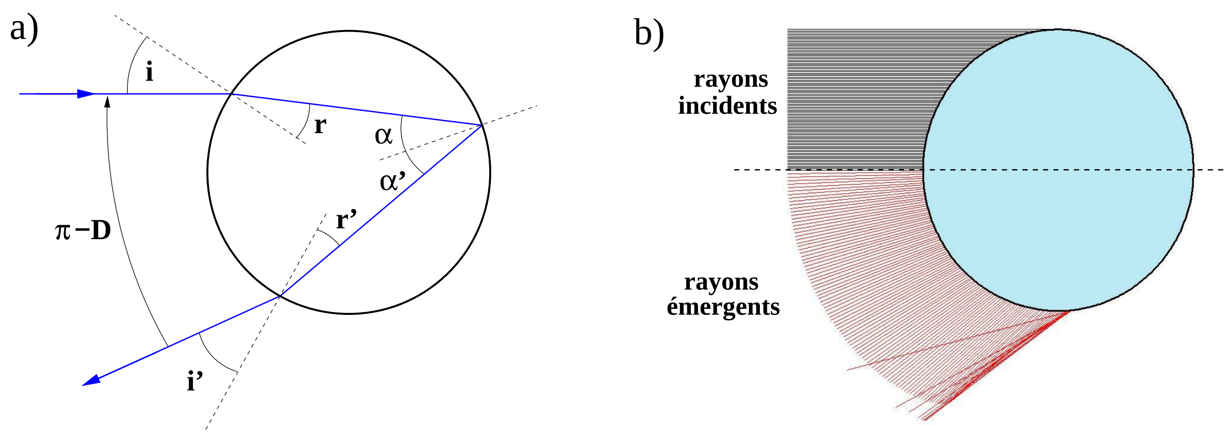

Figure 1 –

I.1. Exprimer la déviation subie lors de trois changement de direction du rayon incident en fonction de i, i', α, α' r et r'. En déduire la déviation totale (notée encore D).

I.2. Exprimer les angles i',α' et r' en fonction des angles i et r. Exprimer alors D en fonction de i et r.

I.3. Montrer que la fonction D admet un minimum en un point i_m. Indication : on pourra différencier la loi de Descartes pour exprimer la dérivée $\frac{dr}{di}$ en fonction de i.

I.4. L'indice de réfraction de l'eau vaut $n = 4/3$. Donner la valeur numérique de i_m ainsi que les valeurs de $r \equiv r_m$ et $D \equiv D_m$ associées, en degrés.

I.5. La figure 1b présente les rayons émergents obtenus après le passage par la goutte de rayons incidents (pour des raisons de clarté de la figure, les rayons ne sont pas représentés à l'intérieur de la goutte et le rayons incidents n'éclairent que la partie supérieure de la goutte).

Commentez la figure obtenue.

I.6. L'indice de réfraction de l'eau varie en fait faiblement avec la longueur d'onde du rayon incident. Expliquer qualitativement pourquoi la lumière blanche est alors décomposée.

I.7. Tracer l'allure de l'intensité lumineuse émergente en fonction de la déviation D.

I.8. Lorsque des gouttes d'eau de pluie sont éclairées par le soleil on peut parfois observer un arc-en-ciel. Cependant, en général, un très vaste volume de gouttes est éclairé (et non pas une simple couronne). A l'aide des questions précédentes, expliquer pourquoi le phénomène est néanmoins localisé selon un arc de cercle.

I.9. On place un repère (Oxyz) au pied d'un observateur, orienté tel que le soleil soit dans le plan vertical (Oxz). On note α la hauteur (en degrés) du soleil (voir figure 2).
Décrire la position de l'arc-en-ciel et le représenter sur le schéma (à reproduire sur votre copie).

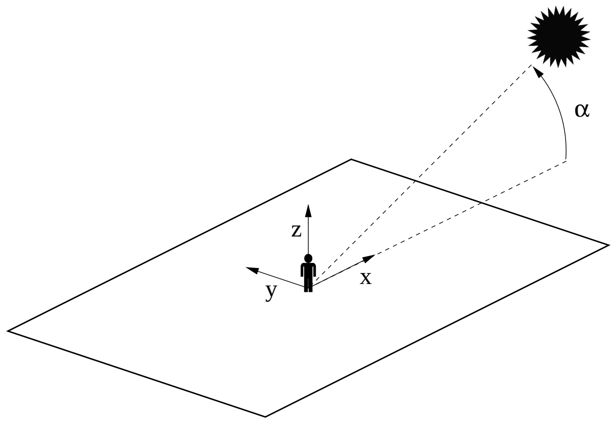

Figure 2 –

I.10. Les rayons incidents peuvent également suivre une trajectoire qui comprend deux réflexions sur la face intérieure de la goutte (voir figure 3 qui présente le rayon au minimum de déviation). Expliquer pourquoi cela conduit à l'apparition d'un deuxième arc-en-ciel. Où se situe-t-il par rapport au premier ?

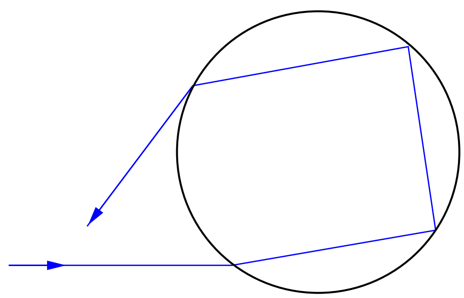

Figure 3 –

I.11. Pourquoi le second arc-en-ciel est-il moins lumineux que le premier ?

I.12. Expliquer sans calcul pourquoi l'ordre des couleurs dans le second arc-en-ciel est inversé.

Partie II - Problème : corde pesante et surfaces minimales

Une corde de longueur L est suspendue entre deux crochets de coordonnées, $x = \pm a/2$ et $y = H$ (figure 4a). On note $y = f(x)$ la position adoptée par la corde au repos. La masse linéique de la corde est notée μ, elle est inextensible et sans raideur. On note $\vec{g}$ l'accélération de la gravité.

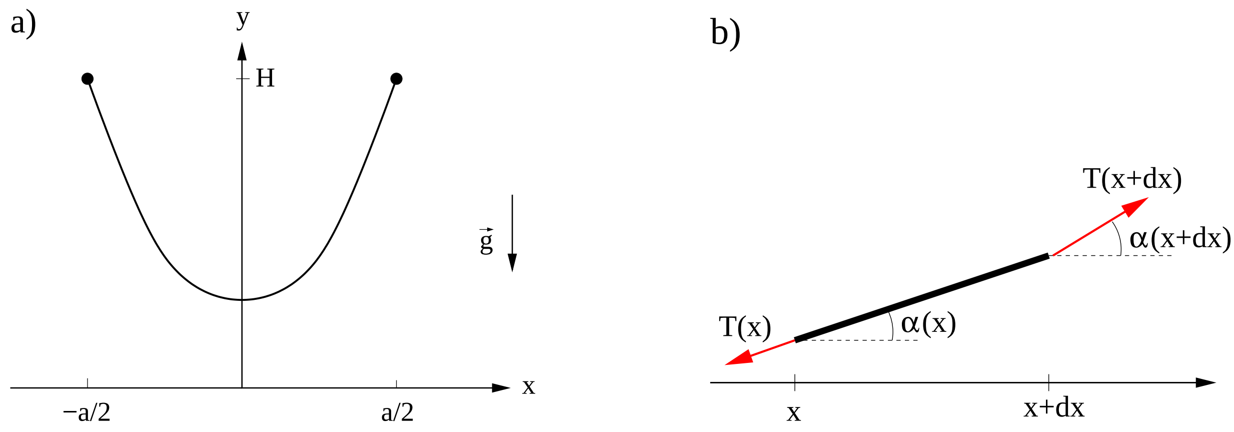

FIGURE 4 –

On rappelle les dérivées des fonctions trigonométriques et hyperboliques inverses :

$$\begin{cases} \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\[2ex] \arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{arcsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\[2ex] \mathrm{arcch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$$

II.1. Justifier que la tension dans la corde n'est pas homogène.

II.2. On considère un élément infinitésimal de longueur dl compris entre les points d'abscisse x et $x + dx$ (voir figure 4b). On note $T(x)$ et $\alpha(x)$ les tensions et inclinaisons de la corde au point d'abscisse x.

Donner la relation entre $\alpha(x)$ et $f'(x)$.

II.3. Etablir qu'au premier ordre non nul, on a la relation :

$$dl = dx\,\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

II.4. Montrer que la tension vérifie la relation suivante :

$$T(x) = \frac{T_0}{\cos\alpha(x)}$$

II.5. Quel est le sens physique de la constante T_0 ?

De quelles grandeurs dépend-elle ? (on ne cherchera pas à donner son expression).

II.6. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que la position de la corde vérifie :

$$f''(x) = A\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

où A est une constante que l'on exprimera. Quelle est sa dimension ?

II.7. Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dF}{\sqrt{1 + F(x)^2}} = A\,dx$$

où F est une fonction que l'on explicitera.

II.8. Résoudre l'équation précédente et montrer que :

$$f(x) = \lambda \,\mathrm{ch}\frac{x - x_0}{\lambda} + C$$

où λ et x_0 sont des constantes que l'on exprimera en fonction de μ, g et T_0, et C une constante d'intégration.

II.9. Expliquer pourquoi λ ne dépend en fait que de a, H et L. Comment la forme de la corde est-elle modifiée si l'on double sa masse linéique ?

Approche énergétique

Nous avons jusqu'à présent étudié le problème d'un point de vue mécanique. On peut également adopter le point de vue énergétique en cherchant le minimum de l'énergie potentielle de la corde. Les deux approches sont équivalentes et doivent conduire aux mêmes résultats.

II.10. Donner l'expression générale de l'énergie potentielle E_p de la corde en fonction de $f(x)$ (sans remplacer f par la solution trouvée précédemment).

II.11. Justifier que l'action, notée $\mathcal{S}$ et définie ci-dessous, est minimale pour la solution trouvée. En fonction de quelle variable l'action S doit-elle être minimale ?

$$\mathcal{S} = \int_{-a/2}^{a/2} f(u)\sqrt{1 + f'(u)^2}\,du$$

⋆

Des méthodes dites variationnelles permettent de minimiser la fonction $\mathcal{S}$ en tenant compte de la contrainte donnée par la longueur de la corde. Nous n'appliquerons pas ces méthodes ici, la solution ayant déjà été trouvée dans l'approche mécanique.

Tension superficielle et surface minimale

Un film d'eau savonneuse est tendu entre deux anneaux identiques, de rayon R, parallèles et situés à une distance $2d$ l'un de l'autre (figure 5). L'interface eau savonneuse/air est soumise au phénomène de tension superficielle, qui a pour effet de réduire au maximum la surface du film d'eau savonneuse. On supposera ici que le film possède une symétrie de révolution autour de l'axe (Ox) et on notera $r(x)$ le rayon du film à l'abscisse x.

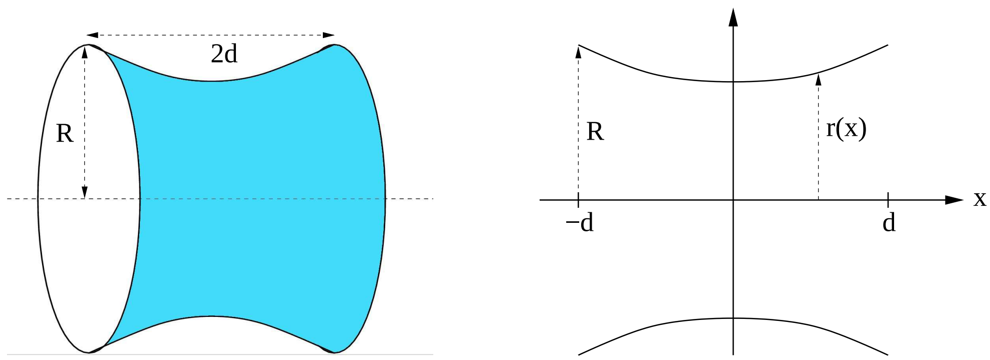

FIGURE 5 –

II.12. En raisonnant sur une surface élémentaire d'épaisseur dx, exprimer sous forme intégrale l'aire $\mathcal{A}$ du film d'eau savonneuse en fonction de $r(x)$ et $r'(x)$.

II.13. Contrairement à la corde, le film d'eau savonneuse est extensible. Peut-on néanmoins utiliser les résultats précédents ? Expliquer en particulier comment réutiliser la solution donnée à la question II.8.

II.14. On admet que la surface minimale adoptée par le film d'eau savonneuse vérifie :

$$r(x) = R_0 \operatorname{ch} \frac{x}{R_0}$$

Quel est le sens physique de R_0 et quelles sont ses valeurs limites acceptables ?

II.15. En faisant le changement de variable, $z = d/R_0$, montrer que z vérifie :

$$\frac{R}{d}\, z = \operatorname{ch} z$$

II.16. Etudier graphiquement le nombre de solutions de cette équation.

II.17. En déduire que pour des anneaux donnés, il existe une distance d critique (que l'on ne cherchera pas à exprimer) au-delà de laquelle le film de savon ne peut pas exister.

⋆ ⋆
⋆